בס"ד
כלים לאנליזה נומרית 83-214
תרגילים 1

1. מה היא השגיאה היחסית של המטריצה

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.0 & 0.1 & 4.1 \\ 3.5 & 1.9 & 7.4 & 8.4 \\ 8.1 & 6.0 & 4.4 & 5.2 \\ 0.0 & 2.7 & 9.3 & 2.0 \\ 1.3 & 1.9 & 4.6 & 6.7 \end{pmatrix}$$

כקירוב למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 2.0 & -0.2 & 4.2 \\ 3.1 & 2.0 & 7.5 & 8.3 \\ 8.2 & 5.9 & 4.2 & 5.4 \\ -0.1 & 2.5 & 9.3 & 2.2 \\ 1.5 & 1.6 & 4.3 & 6.7 \end{pmatrix} \quad ?$$

יש לחשב את השגיאה בנורמות 1, 2 ו- ∞. (לנורמה 2 יש להעזר ב- Matlab).

בדוק, על ידי ניסויים במחשב, שלכל ווקטור עמוד v, השגיאה היחסית של הווקטור $\bar{A}v$ כקירוב לווקטור Av היא לכל היותר פי 10 מהשגיאה היחסית של $\bar{A}$ כקירוב ל-A. (מספיק לעבוד בנורמה 2).

2. (א) לפי התקן של ה- IEEE, מה הוא השלם n הכי גדול כך שהמחשב יכול "לזכור" גם את n וגם את $n+1$ ללא שגיאת עיגול ?

(ב) לפי התקן של ה- IEEE, מה הוא המספר הכי גדול שאיננו שלם ושהמחשב יכול "לזכור" ללא שגיאת עיגול ?

(ג) כאשר אני עובד ב- format hex ב-Matlab ואני כותב 1.2 אני מקבל תשובה

`3ff3333333333333` .

כאשר אני כותב 0.6 אני מקבל

`3fe3333333333333` .

מה צריך לכתוב כדי לקבל

`3333333333333333` ?

(ד) כאשר אני עובד ב- format hex ב-Matlab ואני כותב 0 אני מקבל תשובה

`0000000000000000` .

כאשר אני כותב -0 אני מקבל

`8000000000000000` .

הסבר!

3. בחישוב של הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x) = x^3$ כאשר $x = 10$ עושים 3 טעויות:

(א) במקום $x = 10$ משתמשים ב-$x = 10.00001$.

(ב) משתמשים בקירוב לנגזרת

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

כאשר h הוא מספר חיובי קטן.

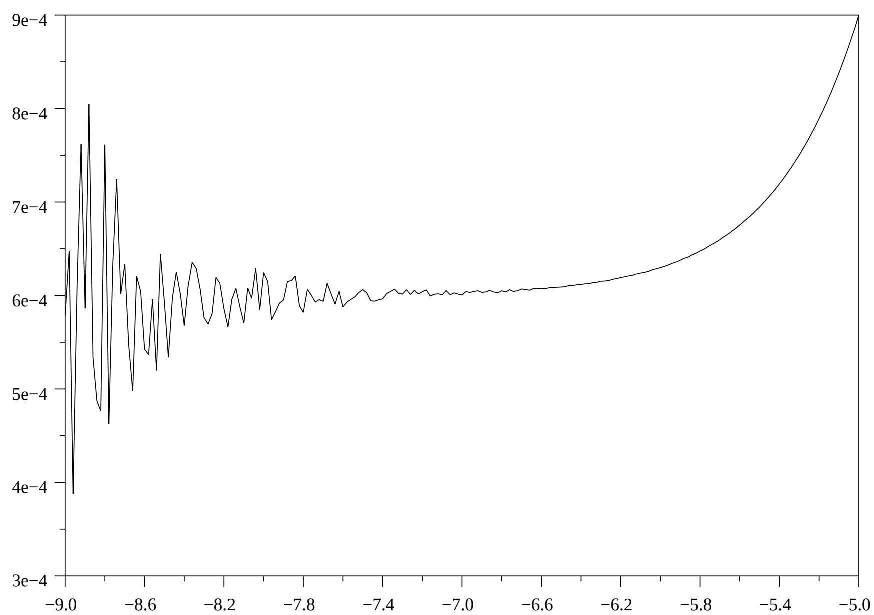
(ג) עושים את כל החישובים על מחשב העובד לפי התקן הסטנדרטי (double precision).

מצא אומדנים לשגיאות הנומריות הנובעות מכל אחד מ-3 הטעויות האלה.

כאשר מודדים את השגיאה הכוללת בחישוב, אל ידי שכותבים את הפקודות הבאות ב-Matlab:

```
x=10.00001;
h=10.^[-9:0.02:-5];
f=((h+x).^3-x^3)./h;
err=abs(f-300);
plot(log10(h),err)
```

מקבלים את הגרף הבא:



הסבר!

4. לפי התאוריה, השורש הקטן של המשוואה הריבועית
$$ax^2 - 200x + 0.001 = 0$$
שואף ל-0.5×10^{-5} כאשר הפרמטר החיובי a שואף ל-0. אבל כאשר מנסים לבדוק את זה ב-Matlab, על ידי שכותבים

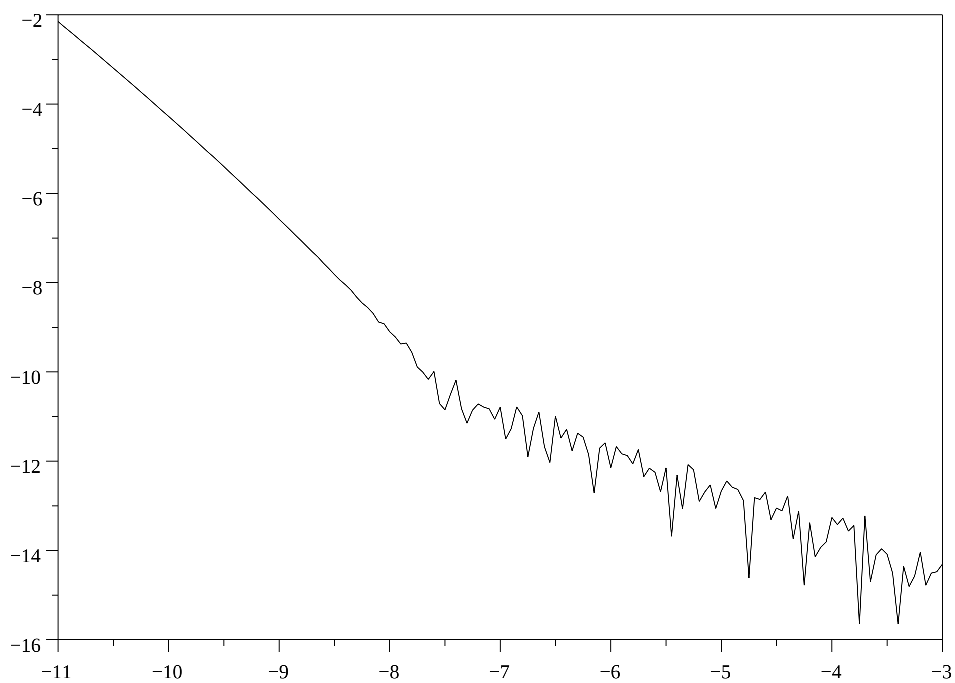
```
a = [1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3]
x =(200-sqrt(200^2-4*0.001*a))./(2*a)
```

מקבלים את התוצאה

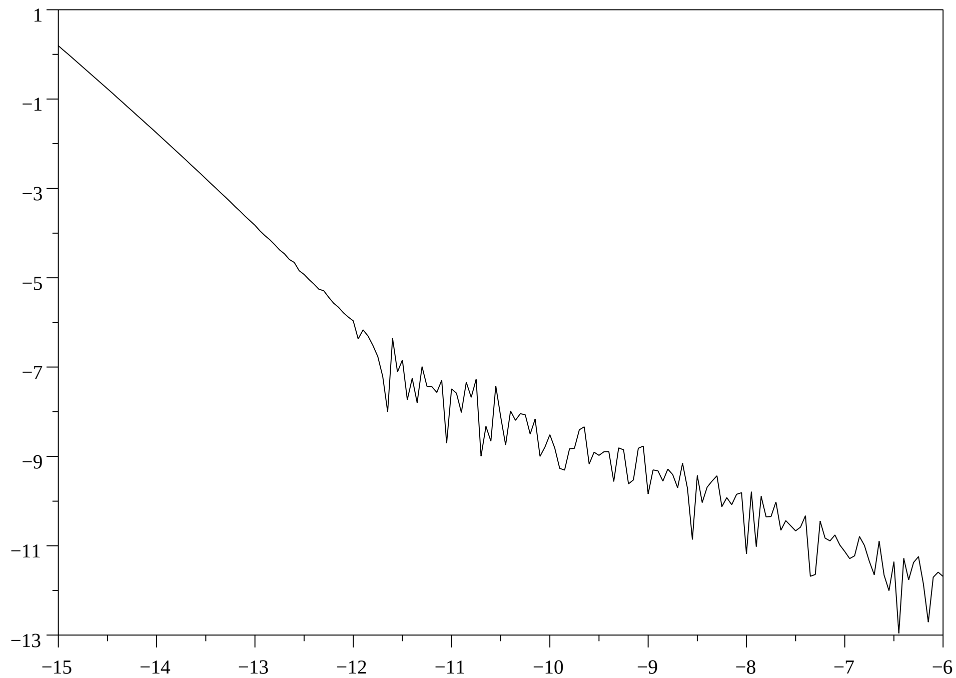
```
x = 1.0e-05 * [0.4263 0.4974 0.5002 0.5001 0.5000 0.5000]
```

למה יש טעויות גבוהות יותר לערכים נמוכים של a? הסבר למה תיתכן שגיאה מוחלטת מסדר גודל $10^{-14}/a$.

5. כאשר משתמשים בקירוב
$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$
לחשב e^x (כאן N שלם חיובי גדול) מקבלים שגיאות יחסיות כדלהלן:
כאשר $N = 40$:



כאשר $N = 50$:



הגדפים מראים את ה-$\log$ בבסיס 10 של השגיאה היחסית, כפונקציה של x.

הסבר את צורת הגרפים. ל-N כללי, איפה יהיה המעבר בין שגיאת עיגול ושגיאה אלגוריתמית? בדוק את ההשערה שלך במחשב!

6. (מומלץ להעזר ב-Maple!)

(א) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-2h), f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן ?

(ב) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן ?

(ג) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-h), f(x-\sigma h), f(x), f(x+\tau h), f(x+h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן, ו-σ, τ הם שני מספרים בין 0 ל-1 ?

נושאים לסיכום:

1. סוגים שונים של שגיאה
2. מדידת שגיאות, נורמות של ווקטורים ומטריצות
3. התקן של ה- IEEE ושגיאת עיגול במחשב
4. שגיאת עיגול בפעולות כפל וחיבור
5. תחרות של סוגי השגיאות בחישובים פשוטים
6. נגזרות נומריות