בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר א', תשס"ה

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של שיטת ניוטון למצוא קירוב טוב לשורש של $x \sin x = 1$ שהוא בין 1 ו-2. מה הוא, לדעתך, הדיוק של הקירוב שמצאת?

2. מצא פולינום מדרגה 3 או פחות שעובר דרך הנקודות הבאות:

x_i	0	-1	-2	1
y_i	0	2	0	2

יש להשתמש בשיטת ניוטון (שיטת הפרשים מחולקים).

3. מצא קירובים לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}\, dx$$

עם כלל הטרפז עם 1, 2 ו-4 צעדים. העזר בשיטת רומברג למצוא קירוב מדוייק יותר.

4. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = QR$$

כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2673 & 0.7715 & -0.5774 \\ -0.5345 & -0.6172 & -0.5774 \\ -0.8018 & 0.1543 & 0.5774 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -3.7417 & -1.8708 & -6.9488 \\ 0 & 3.2404 & 2.7775 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

העזר בזה למצוא את כל הווקטורים b שעבורם יש פתרון למערכת $Ax = b$.

5. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לנתונים הבאים:

x_i	0	2	3	4	5
y_i	3.2	2.8	2.6	2.3	2.1
w_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

(w_i הוא המשקל שיש ליחס לנקודה (x_i, y_i)).

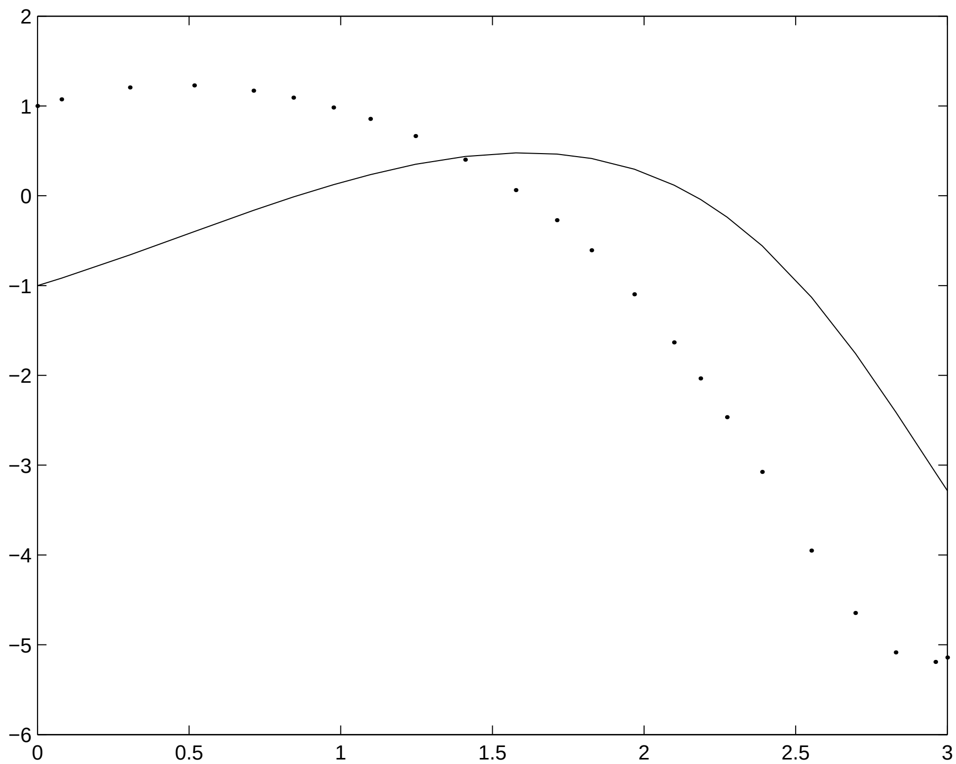
6. בקובץ fd.m מופיעות הפקודות

```
function z=fd(t,y)
z=[y(2);y(1)^2-t^2]
```

כאשר כותבים את הפקודות

```
[t,y]=ode23(@fd,[0,3],[-1;1]);
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'.')
```

מקבלים את הגרף למטה. הסבר!



חלק ב'

1. אם ϵ קטן ו- A, B מספרים חיוביים, הוכח שכאשר מפעילים סיבוב אחד של שיטת "הירידה הטלולה" לפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - \epsilon \sin(x+y)$$

החל מהנקודה $(0,0)$, מקבלים קירוב חדש למינימום שהוא בערך $\left(\frac{2\epsilon}{A+B}, \frac{2\epsilon}{A+B}\right)$. הסבר למה המינימום של הפונקציה הוא בפועל קרוב ל- $(\frac{\epsilon}{A}, \frac{\epsilon}{B})$. מתי שיטת הירידה הטלולה עובדת טוב לפונקציה זו ?

2. מצא a_1, a_2, w_1, w_2 כך שנוסחת התרבוע

$$\int_0^\pi f(x)dx \approx w_1 f(a_1) + w_2 f(a_2)$$

היא מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$.
העזר בנוסחה שמצאת כדי למצוא קירובים לאנטגרלים

$$\int_0^\pi x^2 dx \ , \qquad \int_0^\pi \frac{dx}{1+x}$$

מה הן הטעויות היחסיות בקירובים שמצאת ?

3. מצא את הקירוב הלינארי $p(x) = \alpha x + \beta$ הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לפולינים נתון מדרגה 5

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5$$

על הקטע $[-1, 1]$.
לפולינום נתון מדרגה 5 יוצא שהקירוב הכי טוב על ידי פולינום מדרגה עד 3 (במובן של ריבועים מזעריים על הקטע $[-1, 1]$) הוא דווקא פולינום ליניארי. מה ניתן ללמוד מזה על המקדמים של הפולינום מדרגה 5 ?
באופן כללי, אם לפולינום מדרגה n הקירוב הפולינומי הכי טוב מדרגה עד m (במובן של ריבועים מזעריים על הקטע $[-1, 1]$) הוא לינארי, מה ניתן להגיד על הפולינום מדרגה n ?

4. אם

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.4103 & 0.3529 & 0.1389 \\ 0.8936 & 0.8132 & 0.2028 \\ 0.0579 & 0.0099 & 0.1987 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0.4110 & 0.3526 & 0.1387 \\ 0.8929 & 0.8135 & 0.2030 \\ 0.0577 & 0.0100 & 0.1987 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.4106 & 0.3532 & 0.1390 \\ 0.8943 & 0.8139 & 0.2030 \\ 0.0579 & 0.0099 & 0.1987 \end{pmatrix}$$

ו-

$$b = \begin{pmatrix} 0.0680 \\ -0.7124 \\ -0.1688 \end{pmatrix}$$

אזי הפתרונות של המשוואות $A_1x_1 = b$, $A_2x_2 = b$ ו- $A_3x_3 = b$ הם

$$x_1 = \begin{pmatrix} 40.5921 \\ -42.8523 \\ -10.5428 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 35.1130 \\ -37.1257 \\ -9.1775 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 40.6060 \\ -42.8620 \\ -10.5463 \end{pmatrix}$$

איך ייתכן ש- x_2 כל כך שונה מ- x_1 ו- x_3, שהם די קרובים ? העזר בתוצאות למצוא חסם תחתון על מספר המצב של המטריצה A_1. ניתן לעבוד או בנורמה 1 או בנורמה ∞.