בס"ד
כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף
מועד א', סמסטר א', תשס"ה

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של שיטת ניוטון למצוא קירוב טוב לשורש של $x \sin x = 1$ שהוא בין 1 ו-2. מה הוא, לדעתך, הדיוק של הקירוב שמצאת?

תשובה: רקורסית ניוטון לפתרון $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

בשבילנו $f(x) = x \sin x - 1$ ולכן

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \sin x_n - 1}{\sin x_n + x_n \cos x_n} = \frac{x_n^2 \cos x_n + 1}{\sin x_n + x_n \cos x_n}$$

אם נקח $x_0 = 1.5$ נמצא

$$x_1 = 1.050342402\ , \qquad x_2 = 1.114181251\ , \qquad x_3 = 1.114157141$$

רואים שב- x_2 הטעות היא מסדר גודל של פחות מ- 3×10^{-5}, ולכן בתוצאה הסופית x_3 מצפים שהטעות תהיה מסדר גודל 10^{-9}. (וניתן לבדוק שזה באמת נכון!)

2. מצא פולינום מדרגה 3 או פחות שעובר דרך הנקודות הבאות:

x_i	0	−1	−2	1
y_i	0	2	0	2

יש להשתמש בשיטת ניוטון (שיטת הפרשים מחולקים).

תשובה: טבלת הפרשים מחולקים:

x_i	y_i			
0	0			
−1	2	−2		
−2	0	2	−2	
1	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

ולכן הפולינום הוא

$$-2x - 2x(x+1) + \frac{4}{3}x(x+1)(x+2)$$

יש לשים לב שסדר הנקודות אינו חשוב! אבל אם מסדרים מקבלים טבלה

$$\begin{array}{r|llll} x_i & y_i & & & \\ \hline -2 & 0 & & & \\ -1 & 2 & 2 & & \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \frac{4}{3} \end{array}$$

ולכן הפולינום הוא

$$2(x+2)-2(x+2)(x+1)+\frac{4}{3}(x+2)(x+1)x$$

זה כמובן אותו פולינום. ניתן לבדוק ששני הפולינומים שווים $\frac{2}{3}(2x^3+3x^2-2x)$. עוד סדר מעניין:

$$\begin{array}{r|llll} x_i & y_i & & & \\ \hline -2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & 2 & -2 & -2 & \\ 1 & 2 & 0 & 2 & \frac{4}{3} \end{array}$$

נותן את הפולינום בצורה

$$-2(x+2)x+\frac{4}{3}(x+2)x(x+1)$$

3. מצא קירובים לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}\, dx$$

עם כלל הטרפז עם 1, 2 ו-4 צעדים. העזר בשיטת רומברג למצוא קירוב מדוייק יותר.

תשובה: כלל טרפז עם צעד אחד:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}dx \approx \frac{1}{2}(0+0.280490)=0.140245$$

שני צעדים:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}(f(0)+2f(0.5)+f(1)) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}dx \approx \frac{1}{4}(0+2*0.191770+0.280490) \approx 0.166008$$

ארבע צעדים:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{8}(f(0)+2f(0.25)+2f(0.5)+2f(0.75)+f(1)) \qquad \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}dx \approx \frac{1}{8}(0+2*0.109957+2*0.191770+2*0.247869+0.280490) \approx 0.172460$$

טבלת רומברג:

$$\begin{array}{c|lll} I_1 & 0.140245 & & \\ I_2 & 0.166008 & 0.174596 & \\ I_4 & 0.172460 & 0.174611 & 0.174612 \end{array}$$

(תשובה מדוייקת ל-6 ספרות דיוק: 0.174613.)

4. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = QR$$

כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2673 & 0.7715 & -0.5774 \\ -0.5345 & -0.6172 & -0.5774 \\ -0.8018 & 0.1543 & 0.5774 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -3.7417 & -1.8708 & -6.9488 \\ 0 & 3.2404 & 2.7775 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

העזר בזה למצוא את כל הווקטורים b שעבורם יש פתרון למערכת $Ax = b$.

תשובה: רואים ש- $\det A = \det Q \det R = 0$ ולכן למערכת $Ax = b$ או אין פתרון או יש אינסוף פתרונות, תלוי בבחירה של b. אם $Ax = b$ ו- $A = QR$ אזי $Rx = Q^T b$ (היות ו-Q אורתוגונלית). למערכת זו יש פתרון אם ורק אם השורה האחרונה של $Q^T b$ מתאפס, כלומר $-b_1 - b_2 + b_3 = 0$

5. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לנתונים הבאים:

x_i	0	2	3	4	5
y_i	3.2	2.8	2.6	2.3	2.1
w_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

(w_i הוא המשקל שיש ליחס לנקודה (x_i, y_i).)

תשובה: יש לבחור את a, b כך ש-

$$\begin{pmatrix} \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i \\ \sum w_i x_i & \sum w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i x_i y_i \\ \sum w_i y_i \end{pmatrix}$$

כאן זה נותן

$$\begin{pmatrix} 11.7 & 3.1 \\ 3.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.4 \\ 2.54 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2.09} \begin{pmatrix} 1 & -3.1 \\ -3.1 & 11.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.4 \\ 2.54 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.227 \\ 3.24 \end{pmatrix}$$

(מאוד סביר לפי הנתונים.)

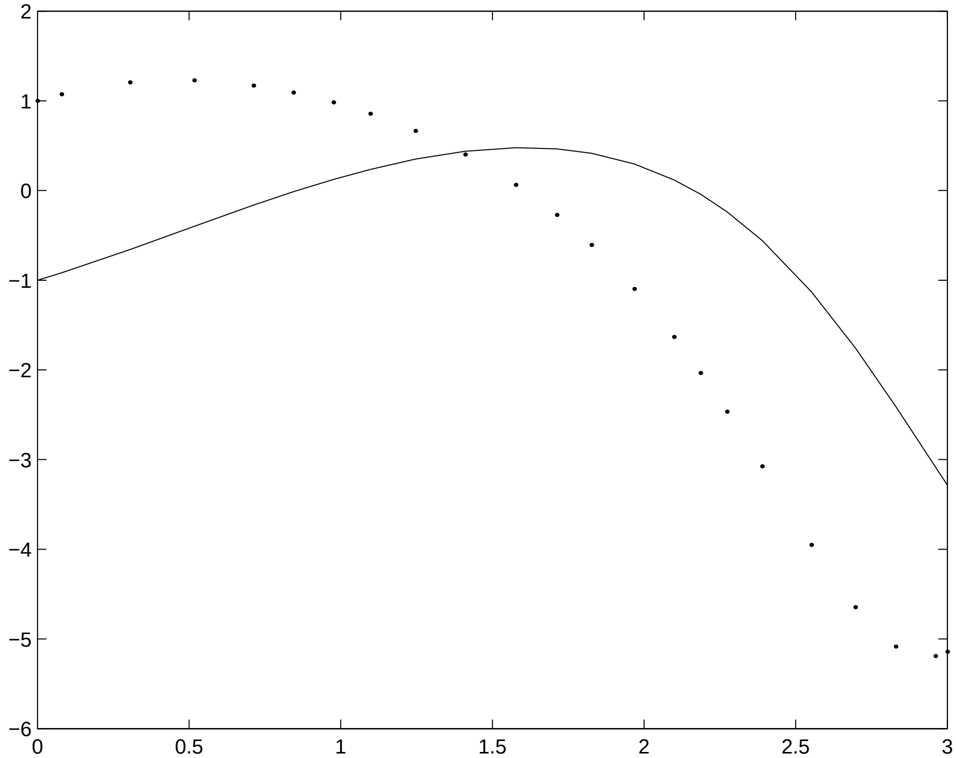
6. בקובץ fd.m מופיעות הפקודות

```
function z=fd(t,y)
z=[y(2);y(1)^2-t^2]
```

כאשר כותבים את הפקודות

```
[t,y]=ode23(@fd,[0,3],[-1;1]);
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'.')
```

מקבלים את הגרף למטה. הסבר!



תשובה: הפקודות האלה פותרים את המערכת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - t^2 \end{pmatrix}$$

עם תנאי התחלה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matlab מוצא את הפתרון עבור t בין 0 ו-3, ומצייר את הגרפים של $y_1(t)$ ו- $y_2(t)$, הראשון עם קו רגיל והשני על ידי "קו של נקודות".

חלק ב'

1. אם ϵ קטן ו- A, B מספרים חיוביים, הוכח שכאשר מפעילים סיבוב אחד של שיטת "הירידה הטלולה" לפונקציה

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - \epsilon \sin(x + y)$$

החל מהנקודה $(0, 0)$, מקבלים קירוב חדש למינימום שהוא בערך $\left(\frac{2\epsilon}{A+B}, \frac{2\epsilon}{A+B}\right)$. הסבר למה המינימום של הפונקציה הוא בפועל קרוב ל- $(\frac{\epsilon}{A}, \frac{\epsilon}{B})$. מתי שיטת הירידה הטלולה עובדת טוב לפונקציה זו ?

תשובה: בשיטת הירידה הטלולה עושים חיפוש בכיוון של מינוס הגרדינט. לפונקציה שלנו

$$\nabla f = \begin{pmatrix} Ax - \epsilon \cos(x + y) \\ By - \epsilon \cos(x + y) \end{pmatrix}$$

ולכן אם מתחילים ב- $(0,0)$ עושים חיפוש בכיוון

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

הקירוב החדש לכן יהיה $(x,y)=(\epsilon s,\epsilon s)$ כאשר s נבחר כדי לעשות

$$g(s)=f(\epsilon s,\epsilon s)=\frac{\epsilon^2 s^2}{2}(A+B)-\epsilon\sin(2\epsilon s)$$

מינימלי. היות ועבור t קטן $\sin t\approx t$, רואים ש-

$$g(s)\approx\frac{\epsilon^2 s^2}{2}(A+B)-2\epsilon^2 s=\epsilon^2\left(\frac{1}{2}(A+B)s^2-2s\right)$$

ולכן

$$g'(s)\approx\epsilon^2\left((A+B)s-2\right)$$

לכן מקבלים מינימום של $g(s)$ כאשר $s=\frac{2}{A+B}$ כלומר, הקירוב החדש יהיה בערך

$$\left(\frac{2\epsilon}{A+B},\frac{2\epsilon}{A+B}\right)$$

המינימום האמיתי של הפונקציה הוא כאשר $\nabla f=0$, כלומר כאשר

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{A}\epsilon\cos(x+y) \\ y &= \frac{1}{B}\epsilon\cos(x+y) \end{aligned}$$

מהמשוואות האלה רואים ש- x ו- y הם קטנים במינימום, והיות ועבור t קטן $\cos t\approx 1$, יוצא שהמינימום הוא בערך ב-

$$\left(\frac{\epsilon}{A},\frac{\epsilon}{B}\right)$$

רואים שאם A,B קרובים זה לזה, אזי שיטת הירידה הטלולה עובדת טוב (כבר בסיבוב הראשון). אבל אם הם שונים מאוד זה מזה, הירידה הטלולה לא תצליח (יש לפונקציה f "עמק צר").

2. מצא a_1,a_2,w_1,w_2 כך שנוסחת התרבוע

$$\int_0^\pi f(x)dx\approx w_1f(a_1)+w_2f(a_2)$$

היא מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x$.
העזר בנוסחה שמצאת כדי למצוא קירובים לאנטגרלים

$$\int_0^\pi x^2dx\ ,\qquad \int_0^\pi\frac{dx}{1+x}$$

מה הן הטעויות היחסיות בקירובים שמצאת?

תשובה: יש לדרוש ש-

$$\begin{aligned}\pi &= w_1 + w_2\\ 0 &= w_1\cos a_1 + w_2\cos a_2\\ 0 &= w_1\cos 2a_1 + w_2\cos 2a_2\\ 0 &= w_1\cos 3a_1 + w_2\cos 3a_2\end{aligned}$$

יש הרבה דרכים לעבוד עם משוואות אלה. הרביעית היא

$$0 = w_1(4\cos^3 a_1 - 3\cos a_1) + w_2(4\cos^3 a_2 - 3\cos a_2)$$

מהמשוואה השנייה $w_2\cos a_2 = -w_1\cos a_1$. ולכן ניתן לכתוב את המשוואה הרביעית בצורה

$$0 = w_1\cos a_1(\cos^2 a_1 - \cos^2 a_2)$$

שממנה נובע ש- $\cos a_2 = -\cos a_1$. אחרי שקבלנו את זה, רואים משתי המשוואות הראשונות ש- $w_1 = w_2 = \frac{\pi}{2}$, ומהמשוואה השלישית ש- $\cos^2 a_1 = \cos^2 a_2 = \frac{1}{2}$. סוף סוף מגיעים לנוסחת הקירוב

$$\int_0^\pi f(x)dx \approx \frac{\pi}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

כאשר $f(x) = x^2$ מוצאים ש-

$$\frac{\pi^3}{3} \approx \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{5\pi^3}{16}$$

טעות יחסית

$$\frac{\left|\frac{1}{3} - \frac{5}{16}\right|}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{16}$$

כאשר $f(x) = \frac{1}{1+x}$ מוצאים ש-

$$\ln(1+\pi) \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3\pi}{4}}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{4+\pi} + \frac{1}{4+3\pi}\right) = \frac{8\pi(2+\pi)}{(4+\pi)(4+3\pi)}$$

טעות יחסית

$$\frac{|1.348 - 1.421|}{1.421} = 0.051$$

3. מצא את הקירוב הלינארי $p(x) = \alpha x + \beta$ הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לפולינים נתון מדרגה 5

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5$$

על הקטע $[-1,1]$.

לפולינום נתון מדרגה 5 יוצא שהקירוב הכי טוב על ידי פולינום מדרגה עד 3 (במובן של ריבועים מזעריים על הקטע $[-1,1]$) הוא דווקא פולינום ליניארי. מה ניתן ללמוד מזה על המקדמים של הפולינום מדרגה 5 ?

באופן כללי, אם לפולינום מדרגה n הקירוב הפולינומי הכי טוב מדרגה עד m (במובן של ריבועים מזעריים על הקטע $[-1,1]$) הוא לינארי, מה ניתן להגיד על הפולינום מדרגה n ?

תשובה: עושים את הקירוב הסטנדרטי על ידי פולינומי לז'נדר:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{d} a_i P_i(x) \ , \qquad a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_i(x) dx$$

במקרה שלנו

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_0(x) f(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx = a + \frac{c}{3} + \frac{e}{5}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} P_1(x) f(x) dx = \int_{-1}^{1} x f(x) dx = b + \frac{3d}{5} + \frac{3g}{7}$$

ולכן הקירוב הליניארי הוא

$$\left(a + \frac{c}{3} + \frac{e}{5}\right) + \left(b + \frac{3d}{5} + \frac{3g}{7}\right) x$$

אם רוצים לעשות קירוב לפונקציה $f(x)$ על ידי פולינום מדדרגה 3, התשובה היא $a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x)$. זה יהיה פולינום ליניארי אם ורק אם $a_2 = a_3 = 0$. במקרה שלנו יש לנו, לכן, לדרוש ש-

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} P_2(x) f(x) dx = \int_{-1}^{1} P_3(x) f(x) dx = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) f(x) dx = \int_{-1}^{1} (5x^3 - 3x) f(x) dx = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)(a + cx^2 + ex^4) dx = \int_{-1}^{1} (5x^3 - 3x)(bx + dx^3 + gx^5) dx = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{4}{15} c + \frac{8}{35} e = \frac{4}{35} d + \frac{8}{63} g = 0 \\
\Rightarrow \quad & e = -\frac{7}{6} c \ , \qquad g = -\frac{9}{10} d.
\end{aligned}$$

יש לשים לב שעם האילוצים האלה הפולינום המקורי שלנו לוקח את הצורה

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + bx + c\left(x^2 - \frac{7}{6}x^4\right) + d\left(x^3 - \frac{9}{10}x^5\right) \\
&= \left(a + \frac{c}{10}\right) + \left(b + \frac{3d}{14}\right) x - \frac{4c}{15}\left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}\right) - \frac{4d}{35}\left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right) \\
&= \left(a + \frac{c}{10}\right) + \left(b + \frac{3d}{14}\right) x - \frac{4c}{15} P_4(x) - \frac{4d}{35} P_5(x)
\end{aligned}$$

כלומר: התנאי שהקירוב הכי טוב מדרגה עד 3 יצא להיות ליניארי, הוא שניתן לכתוב את הפולינום המקורי כצירוף של P_0, P_1, P_4, P_5.

כמו כן, אם הקירוב מדרגה עד m לפולינום $f(x)$ מדרגה n יוצא להיות ליניארי, אזי בהכרח ניתן לכתוב את הפולינום $f(x)$ כצירוף ליניארי של $P_0, P_1, P_{m+1}, \ldots, P_n$. כלומר המקדמים של $P_2, P_3, \ldots, P_m$ הם אפס, ואז $\int_{-1}^{1} f(x) P_i(x) dx = 0$, עבור $i = 2, 3, \ldots, m$.

4. אם

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.4103 & 0.3529 & 0.1389 \\ 0.8936 & 0.8132 & 0.2028 \\ 0.0579 & 0.0099 & 0.1987 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0.4110 & 0.3526 & 0.1387 \\ 0.8929 & 0.8135 & 0.2030 \\ 0.0577 & 0.0100 & 0.1987 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.4106 & 0.3532 & 0.1390 \\ 0.8943 & 0.8139 & 0.2030 \\ 0.0579 & 0.0099 & 0.1987 \end{pmatrix}$$

ו-

$$b = \begin{pmatrix} 0.0680 \\ -0.7124 \\ -0.1688 \end{pmatrix}$$

אזי הפתרונות של המשוואות $A_1x_1 = b$, $A_2x_2 = b$ ו- $A_3x_3 = b$ הם

$$x_1 = \begin{pmatrix} 40.5921 \\ -42.8523 \\ -10.5428 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 35.1130 \\ -37.1257 \\ -9.1775 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 40.6060 \\ -42.8620 \\ -10.5463 \end{pmatrix}$$

איך ייתכן ש- x_2 כל כך שונה מ- x_1 ו- x_3, שהם די קרובים ? העזר בתוצאות למצוא חסם תחתון על מספר המצב של המטריצה A_1. ניתן לעבוד או בנורמה 1 או בנורמה ∞.

תשובה: כידוע, הפתרון של המערכת $Ax = b$ יכול להיות רגיש לשינויים קטנים במטריצה A או בווקטור b אם מספר המצב של A הוא גבוה. זה שיש למטריצה A מספר מצב גבוה לא אומר שפתרון המערכת הוא רגיש לכל שינוי ב- A, b. וכן בדוגמה שלנו רואים שהשינוי מ- A_1 ל- A_2 גורם לשינוי גדול ב- x, אבל השינוי מ- A_1 ל- A_3 לא.

כדי לקבל אומדן למספר המצב של A_1 נשתמש באי-השוויון

$$\frac{||x_1 - x_2||}{||x_1||} \leq \kappa(A_1)\frac{||A_1 - A_2||}{||A_1||}$$

בשבילנו

$$x_1 - x_2 \approx \begin{pmatrix} 5.5 \\ -5.7 \\ -1.4 \end{pmatrix}, \qquad ||x_1 - x_2||_1 \approx 12.6, \qquad ||x_1 - x_2||_\infty \approx 5.7$$

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} -0.0007 & 0.0003 & 0.0002 \\ 0.0007 & -0.0003 & -0.0002 \\ 0.0002 & -0.0001 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$||A_1 - A_2||_1 = 0.0016, \qquad ||A_1 - A_2||_\infty = 0.0012$$

ו-

$$||x_1||_1 \approx 94, \qquad ||x_1||_\infty \approx 43$$

$$||A_1||_1 \approx 1.36, \qquad ||A_1||_\infty \approx 1.90$$

ולכן בנורמה 1 יש לנו

$$\kappa(A_1) \geq \frac{||x_1 - x_2||_1}{||x_1||_1}\frac{||A_1||_1}{||A_1 - A_2||_1} \approx 113$$

ובנורמה ∞

$$\kappa(A_1) \geq \frac{||x_1 - x_2||_\infty}{||x_1||_\infty}\frac{||A_1||_\infty}{||A_1 - A_2||_\infty} \approx 210$$