

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

### חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של "חיפוש יחס הזהב" כדי למצוא קירוב למינימום של הפונקציה

$$f(x) = 2 - x \cos x$$

שהוא בין 0.5 ו-1. (ניתן להניח שיש לפונקציה מינימום יחיד בקטע זה).

2. כתוב את הפקודות שהיית כותב ב-Matlab כדי לצייר גרף של עקומה חלקה העוברת דרך הנקודות

$x_i$	0	2	3	4	5	6	9
$y_i$	0	1.78	1.82	1.90	1.85	1.81	0

3. מצא, על ידי כלל סמפסון עם  $h = \frac{1}{4}$ , קירוב לאינטגרל

$$\int_1^2 \frac{x \ln x}{2+x} dx$$

4. הפונקציה  $y(t)$  פותרת את הבעיה

$$y' = \frac{t}{1+y}, \quad y(0) = 1$$

העזר בשיטת אויילר עם  $h = \frac{1}{4}$  למצוא קירוב ל- $y(1)$ .

5. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

יש פירוק SVD

$$A = UDV^T$$

כאשר

$$U = \begin{pmatrix} -0.5519 & 0.6017 & -0.5774 \\ -0.2452 & -0.7788 & -0.5774 \\ -0.7971 & -0.1771 & 0.5774 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8.7619 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6887 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.3919 & -0.5531 & -0.7352 \\ -0.3429 & 0.8293 & -0.4411 \\ -0.8537 & -0.0793 & 0.5147 \end{pmatrix}$$

מה היא הדרגה של  $A$ ? מצא בסיסים לתמונה של  $A$  ( $\text{Im}(A)$ ) ולגרעין של  $A$  ( $\text{Ker}(A)$ ).

6. מצא קירוב ריבועי לפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{3+x}$$

על הקטע  $[-1, 1]$ . תזכורת:  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

חלק ב'

1. מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון המערכת

$$\begin{cases} x + y^2 - 3 = 0 \\ y - 2x^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

יש לכתוב את הרקורסיה בצורה הכי פשוטה שאפשר. בדוק את תשובתך על ידי הפעלת הרקורסיה פעמיים החל מהקירוב  $(x_0, y_0) = (1, 1.5)$ . האם הטעויות מתנהגות כראוי?

2. כאשר מחשבים את האינטגרל

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+x}$$

על ידי כלל הטרפז מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר צעדים	10	12	14	16	18	20
תוצאה	1.42875	1.42642	1.42501	1.42409	1.42346	1.42301

על ידי ההנחה שהתלות של התוצאות על מספר הצעדים  $n$  היא

$$\text{תוצאה} \approx I + \frac{\epsilon}{n^2}$$

מצא קירוב טוב לערך האמיתי של האינטגרל. האם ניתן לשפר אם מניחים תלות מהצורה

$$\text{תוצאה} \approx I + \frac{\epsilon}{n^2} + \frac{\zeta}{n^4} \quad ?$$

3. מצא את  $a$  ואת  $b$  כך שהפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\alpha}{2}(x+1)(x+2)(1+ax) & -2 \leq x \leq 0 \\ x + \frac{\alpha}{2}(x-1)(x-2)(1+bx) & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

יהיה cubic spline עבור הנתונים

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	-2	-1	$\alpha$	1	2

כאשר  $\alpha$  הוא קבוע. הוכח ש-  $f(x)$  היא מונוטונית עולה על הקטע  $-2 < x < 2$  (א) רק אם  $-1 < \alpha < 1$  ו- (ב) אם ורק אם  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ .

4. מצא פירוק LU למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

כאשר  $\alpha$  הוא פרמטר. העזר בזה למצוא את הפתרון של המשוואה  $Ax = b$  כאשר

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נכון או לא נכון: כל פעם שפותרים מערכת  $Ax = b$  כאשר אחד הרכיבים במטריצה  $A$  הוא פרמטר, שנסמן  $\alpha$ , ושאר הרכיבים הם מספרים, אזי הפתרון  $x$  הוא פונקציה לינארית של  $\alpha$ . נמק את תשובתך!