בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר א', תשס"ה

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של "חיפוש יחס הזהב" כדי למצוא קירוב למינינום של הפונקציה

$$f(x) = 2 - x\cos x$$

שהוא בין 0.5 ו- 1. (ניתן להניח שיש לפונקציה מינימום יחיד בקטע זה).

תשובה: סיבוב ראשון:

x	0.5	0.6910	0.8090	1
$f(x)$	1.561	1.468	1.442	1.460

יש להוריד קטע ראשון. סיבוב שני:

x	0.6910	0.8090	0.8820	1
$f(x)$	1.468	1.442	1.439	1.460

שוב מורידים קטע ראשון. סיבוב שלישי:

x	0.8090	0.8820	0.9270	1
$f(x)$	1.442	1.439	1.444	1.460

הפעם מורידים קטע אחרון. כלומר המינימום בין 0.8090 ובין 0.9270. (תשובה מדוייקת 0.8603).

2. כתוב את הפקודות שהיית כותב ב- Matlab כדי לצייר גרף של עקומה חלקה העוברת דרך הנקודות

x_i	0	2	3	4	5	6	9
y_i	0	1.78	1.82	1.90	1.85	1.81	0

תשובה: השיטה העדיפה היא cubic spline:

```
x=[0 2 3 4 5 6 9]
y=[0 1.78 1.82 1.90 1.85 1.81 0]
xx=[0:0.1:9]
plot(xx,spline(x,y,xx))
```

3. מצא, על ידי כלל סמפסון עם $h = \frac{1}{4}$, קירוב לאינטגרל

$$\int_1^2 \frac{x\ln x}{2+x}\,dx$$

תשובה: לפי סמפסון עם $h = \frac{1}{4}$

$$\int_1^2 f(x)\ dx \approx \frac{1}{12}\left(f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right)$$

ולכן: .

$$\int_1^2 \frac{x \ln x}{2+x}\ dx \approx \frac{1}{12}\left(0 + 4 \times 0.08582 + 2 \times 0.17377 + 4 \times 0.26115 + 0.34657\right) \approx 0.17350$$

(תשובה מדוייקת לדיוק זה: 0.17349.)

4. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y' = \frac{t}{1+y}\ , \qquad y(0) = 1$$

העזר בשיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$ למצוא קירוב ל-$y(1)$.

תשובה: רקורסיית אויילר לפתרון $y' = f(t,y)$ היא $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0\ , & y_0 &= 1 \\
t_1 &= \frac{1}{4}\ , & y_1 &= 1 + \frac{1}{4} \times \frac{0}{1+1} = 1 \\
t_2 &= \frac{1}{2}\ , & y_2 &= 1 + \frac{1}{4} \times \frac{\frac{1}{4}}{1+1} = \frac{33}{32} \\
t_3 &= \frac{3}{4}\ , & y_3 &= \frac{33}{32} + \frac{1}{4} \times \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{33}{32}} = \frac{33}{32} + \frac{4}{65} \approx 1.0928 \\
t_4 &= 1\ , & y_4 &= 1.0928 + \frac{1}{4} \times \frac{\frac{3}{4}}{1+1.0928} \approx 1.1824
\end{aligned}$$

(זה לא כל כך מדוייק, שיטת אויילר היא רק מסדר ראשון. התשובה המדוייקת היא $\sqrt{5} - 1 \approx 1.2361$)

5. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

יש פירוק SVD

$$A = UDV^T$$

כאשר

$$U = \begin{pmatrix} -0.5519 & 0.6017 & -0.5774 \\ -0.2452 & -0.7788 & -0.5774 \\ -0.7971 & -0.1771 & 0.5774 \end{pmatrix}\ , \qquad D = \begin{pmatrix} 8.7619 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6887 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}\ ,$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.3919 & -0.5531 & -0.7352 \\ -0.3429 & 0.8293 & -0.4411 \\ -0.8537 & -0.0793 & 0.5147 \end{pmatrix}$$

מה היא הדרגה של A ? מצא בסיסים לתמונה של A ($\mathrm{Im}(A)$) ולגרעין של A ($\mathrm{Ker}(A)$).

תשובה: הדרגה של A היא 2 (מספר הערכים הסינגולריים של A שאינם אפס). בסיס לתמונה של A ניתן על ידי שני העמודים הראשונים של U, ובסיס של הגרעין של A ניתן על ידי העמוד האחרון של V. (את הפרט האחרון ניתן לבדוק בקלות!)

6. מצא קירוב ריבועי לפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{3+x}$$

על הקטע $[-1,1]$. תזכורת: $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.

תשובה: הקירוב הסטנדרטי הוא

$$p(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

כאשר

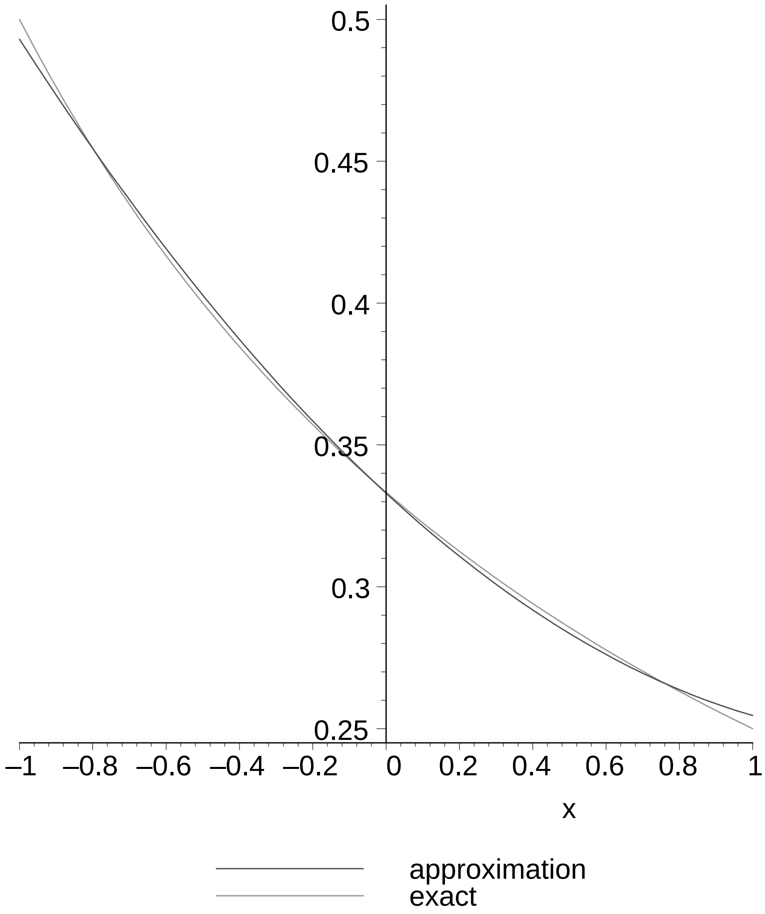
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_0(x) f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\ dx = \frac{1}{2}\left[\ln(3+x)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} P_1(x) f(x) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{3+x}\ dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} 1 - \frac{3}{3+x}\ dx \\ &= \frac{3}{2}\left[x - 3\ln(3+x)\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}(2 - 3\ln 2) \approx -0.1192 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} P_2(x) f(x) = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{3+x}\ dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} 3(x-3) + \frac{26}{3+x}\ dx \\ &= \frac{5}{4}\left[\frac{3}{2}x^2 - 9x + 26\ln(3+x)\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{4}(-18 + 26\ln 2) \approx 0.0273 \end{aligned}$$

כלומר

$$p(x) = 0.3466 - 0.1192x + 0.0273\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \approx 0.3330 - 0.1192x + 0.0408x^2$$



<u>חלק ב'</u>

1. מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון המערכת

$$\begin{cases} x + y^2 - 3 &= 0 \\ y - 2x^3 + 1 &= 0 \end{cases}$$

יש לכתוב את הרקורסיה בצורה הכי פשוטה שאפשר. בדוק את תשובתך על ידי הפעלת הרקורסיה פעמיים החל מהקירוב $(x_0, y_0) = (1, 1.5)$. האם הטעויות מתנהגות כראוי?

תשובה: רקורסיית ניוטון לפתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

היא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \Bigg|_{x=x_n, y=y_n}$$

בשבילנו

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2y_n \\ -6x_n^2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_n + y_n^2 - 3 \\ y_n - 2x_n^3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{1+12x_n^2 y_n} \begin{pmatrix} 1 & -2y_n \\ 6x_n^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n + y_n^2 - 3 \\ y_n - 2x_n^3 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{1+12x_n^2 y_n} \begin{pmatrix} x_n + y_n^2 - 3 - 2y_n(y_n - 2x_n^3 + 1) \\ 6x_n^2(x_n + y_n^2 - 3) + y_n - 2x_n^3 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{1+12x_n^2 y_n} \begin{pmatrix} x_n - 2y_n - y_n^2 - 3 + 4y_n x_n^3 \\ 6x_n^2 y_n^2 + y_n - 18x_n^2 + 4x_n^3 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+12x_n^2 y_n} \begin{pmatrix} 2y_n + y_n^2 + 3 + 8y_n x_n^3 \\ 6x_n^2 y_n^2 + 18x_n^2 - 4x_n^3 - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כאשר מפעילים החל מ-

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

מקבלים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.066 \\ 1.395 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.062 \\ 1.392 \end{pmatrix}$$

רואים ש-

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\| \approx \sqrt{0.066^2 + 0.105^2} \approx 0.124$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \approx \sqrt{0.004^2 + 0.003^2} \approx 0.005$$

ההפרש השני הוא כחצי של הריבוע של ההפרש הראשון. זה וודאי מותאם עם התכנסות ריבועית.

2. כאשר מחשבים את האינטגרל

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+x}$$

על ידי כלל הטרפז מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר צעדים	10	12	14	16	18	20
תוצאה	1.42875	1.42642	1.42501	1.42409	1.42346	1.42301

על ידי ההנחה שהתלות של התוצאות על מספר הצעדים n היא

$$\text{תוצאה} \approx I + \frac{\epsilon}{n^2}$$

מצא קירוב טוב לערך האמיתי של האינטגרל. האם ניתן לשפר אם מניחים תלות מהצורה

$$\text{תוצאה} \approx I + \frac{\epsilon}{n^2} + \frac{\zeta}{n^4} \quad ?$$

תשובה: כניסוי ראשון ננסה למצוא את I ואת ϵ על ידי ריבועים מזעריים: הנתונים הם

$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{12^2}$	$\frac{1}{14^2}$	$\frac{1}{16^2}$	$\frac{1}{18^2}$	$\frac{1}{20^2}$
תוצאה	1.42875	1.42642	1.42501	1.42409	1.42346	1.42301

ולכן

$$\text{תוצאה} \approx I + \frac{\epsilon}{n^2}$$

כאשר

$$\begin{pmatrix} 0.000205291 & 0.0315392 \\ 0.0315392 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0449774 \\ 8.55074 \end{pmatrix}$$

פותרים לקבל

$$\epsilon = 0.765470 \ , \qquad I = 1.42110$$

כאן עבדתי ל-6 ספרות דיוק לאורך כל החישוב. לא כדאי יותר, היות והנתונים רק מדוייקים ל-6 ספרות דיוק. יוצא שהתשובה ל-I שקבלנו הוא מאוד קרוב (לפי דיוק זה) לתשובה המדוייקת שהיא 1.42108. איך ניתן לדעת את זה? אם מחשבים את הערכים של $I + \frac{\epsilon}{n^2}$ עם התשובות שקבלנו מוצאים:

n	10	12	14	16	18	20
$I + \frac{\epsilon}{n^2}$	1.42875	1.42642	1.42501	1.42409	1.42346	1.42301

כלומר קבלנו בדיוק הנתונים שהתחלנו מהם! אין טעם לחפש עוד תיקון בצורה $\frac{\zeta}{n^4}$.

הערה: אם לוקחים רק את הנתונים של $n = 10$ ו- $n = 20$ ועושים רומברג, גם מוצאים $I = 1.42110$. ניתן לענות על שאלה זו גם בדרך הזאת.

3. מצא את a ואת b כך שהפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\alpha}{2}(x+1)(x+2)(1+ax) & -2 \le x \le 0 \\ x + \frac{\alpha}{2}(x-1)(x-2)(1+bx) & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

יהיה cubic spline עבור הנתונים

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-2	-1	α	1	2

כאשר α הוא קבוע. הוכח ש- $f(x)$ היא מונוטונית עולה על הקטע $-2 < x < 2$

(א) רק אם $-1 < \alpha < 1$

(ב) אם ורק אם $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

תשובה: ברור ש- $f(x)$ מקבל את הערכים הנכונים בנקודות $x = -2, -1, 0, 1, 2$. לבדוק ש- $f(x)$ היא cubic spline יש רק צורך לבדוק ש- $f'(x)$ ו- $f''(x)$ הן רציפות כאשר $x = 0$. יש לנו ש-

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2}(3ax^2 + 2(3a+1)x + (2a+3)) & -2 \le x \le 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2}(3bx^2 + 2(-3b+1)x + (2b-3)) & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

ו-

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}(6ax + 2(3a+1)) & -2 \le x \le 0 \\ \frac{\alpha}{2}(6bx + 2(-3b+1)) & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

ולכן התנאים הנדרשים הם $2a + 3 = 2b - 3$ ו- $3a + 1 = -3b + 1$. כלומר $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}$.

(א) אם $\alpha \ge 1$ אזי $f(x)$ איננה מונוטונית עולה על הקטע $0 \le x \le 1$. כמו כן, אם $\alpha \le 1-$ אזי $f(x)$ איננה מונוטונית עולה על הקטע $-1 \le x \le 0$. ולכן תנאי הכרחי ש- $f(x)$ תהיה מונוטונית עולה בקטע $-2 < x < 2$ הוא ש- $-1 < \alpha < 1$.

(ב) יש לנו ש-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 1-\frac{1}{4}\alpha(9x^2+14x) & -2\le x\le 0 \\ 1+\frac{1}{4}\alpha(9x^2-14x) & 0\le x\le 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1+\frac{49}{36}\alpha-\frac{\alpha}{4}\left(3x+\frac{7}{3}\right)^2 & -2\le x\le 0 \\ 1-\frac{49}{36}\alpha+\frac{\alpha}{4}\left(3x-\frac{7}{3}\right)^2 & 0\le x\le 2 \end{cases} \end{aligned}$$

אם $\alpha>0$ אזי $f'(x)$ מקבל ערך מינימלי בקטע $-2\le x\le 0$ כאשר $x=-2$, שם $f'(x)=1-2\alpha$. כמו כן $f'(x)$ מקבל ערך מינימלי בקטע $0\le x\le 2$ כאשר $x=\frac{7}{9}$, שם $f'(x)=1-\frac{49}{36}\alpha$. אנחנו רואים שכאשר $\alpha>0$, $f'(x)>0$ בכל הקטע $-2\le x\le 2$ אם ורק אם $\alpha<\frac{1}{2}$.

אם $\alpha<0$ אזי $f'(x)$ מקבל ערך מינימלי בקטע $-2\le x\le 0$ כאשר $x=-\frac{7}{9}$, שם $f'(x)=1+\frac{49}{36}\alpha$. כמו כן $f'(x)$ מקבל ערך מינימלי בקטע $0\le x\le 2$ כאשר $x=2$, שם $f'(x)=1+2\alpha$. אנחנו רואים שכאשר $\alpha<0$, $f'(x)>0$ בכל הקטע $-2\le x\le 2$ אם ורק אם $\alpha>-\frac{1}{2}$.

4. מצא פירוק LU למטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

כאשר α הוא פרמטר. העזר בזה למצוא את הפתרון של המשוואה $Ax=b$ כאשר

$$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נכון או לא נכון: כל פעם שפותרים מערכת $Ax=b$ כאשר אחד הרכיבים במטריצה A הוא פרמטר, שנסמן α, ושאר הרכיבים הם מספרים, אזי הפתרון x הוא פונקציה לינארית של α. נמק את תשובתך!

תשובה: אם

$$l_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

אזי

$$l_1u_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A-l_1u_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha-4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

אם

$$l_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha-4 \end{pmatrix}$$

אזי

$$l_2u_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A-l_1u_1-l_2u_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = LU \ , \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha - 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

לפתור $Ax = b$ קודם נפתור $Ly = b$ ואח"כ $Ux = y$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha - 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{21-2\alpha}{5} \\ \frac{\alpha-9}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

באופן כללי כאשר כל הרכיבים במטריצה A הם מספרים, חוץ מאחד, שהוא פרמטר שנסמן α, אזי הפתרון x של המערכת $Ax = b$ מקבלת את הצורה

$$x = \frac{y_0 \alpha + y_1}{C_0 \alpha + C_1}$$

כאשר y_0, y_1 הם וקטורים לא תלויים ב- α ו- C_0, C_1 הם מספרים שאינם תלויים ב- α. הסיבה לכך: הדטרמיננט של A יהיה פונקציה ליניארית של α. בדוגמה שלנו הדטרמיננט של A (שהוא שווה לדטרמיננט של U) במקרה איננו תלוי ב- α ולכן $C_0 = 0$.