בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214

תרגילים 2

1. אם A היא מטריצה מגודל $m \times n$ ו- b הוא וקטור ממימד m, מה היא התוצאה ש- Matlab נותן כאשר כותבים $A \backslash b$? יש להתייחס למקרים $n < m$, $m = n$, ו- $m > n$.

אם

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

העזר ב- Matlab למצוא את כל הפתרונות x של המערכת $Ax = b$ שיש להם שני רכיבים שווים ל-0. מצא את $||x||_2$ לכל הפתרונות האלה. האם ניתן למצוא פתרון של $Ax = b$ כך ש- $||x||_2$ הוא יותר קטן ?

2. אם A היא מטריצה מגודל $m \times n$ ו- B היא מטריצה מגודל $m \times p$, מה היא התוצאה ש- Matlab נותן כאשר כותבים $A \backslash B$? יש להתייחס למקרים $n < m$, $m = n$, ו- $m > n$.

אם A היא מטריצה מגודל 5×3 ו- B היא מטריצת היחידה מגודל 5×5 , בדוק שהפקודה $A \backslash B$ נותנת את $\mathrm{pinv}(A)$.

אם A היא מטריצה מגודל 3×5 ו- B היא מטריצת היחידה מגודל 3×3 , הפקודה $A \backslash B$ לא בהכרח נותנת את $\mathrm{pinv}(A)$. האם אתה יכול להסביר למה ? (מומלץ לעשות ניסוי !)

3. נתונות n נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ במישור, ורוצים למצוא קו ישר $y = mx + c$ שהוא קרוב לנקודות, במובן ש

$$\begin{aligned} mx_1 + c &\approx y_1 \\ mx_2 + c &\approx y_2 \\ &\vdots \\ mx_n + c &\approx y_n \end{aligned} .$$

כתוב פונקציה (קובץ M) ב-Matlab אשר, בהנתן הנקודות (x_i, y_i), "פותרת" את המערכת הליניארית הזאת למצוא m, c (במובן של ריבועיים מזעריים). בנוסף לחישוב m, c, הוסף לפונקציה יכולת לחשב את "שורש ממוצע הריבועים של השגיאות"

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - c)^2} .$$

איך היית מכליל את הפונקציה שלך למצוא מישור $z = mx + ly + c$ שהוא קרוב ל- n נקודות נתונות $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$?

4. בחר A מטריצה רנדומית מגודל 100×100, ומצא את מספר הערכים הסינגולריים של A בין 0 ל-1, בין 1 ל-2, בין 2 ל-3, בין 3 ל-4, בין 4 ל-5, בין 5 ל-6, ומעל 6. האם ההתפלגות הזאת משתנה כאשר משנים את A ? האם אתה יכול להסביר למה יש (כמעט) תמיד ערך סינגולרי אחד קרוב ל-50, וחוץ מזה שום ערך סינגולרי אחר מעל 6 ? מה אם A היא מטריצה רנדומית גדולה מגודל $m \times n$? בדוק את ההשערה שלך.

הערה: מייצרים מטריצה רנדומית מגודל $m \times n$ ב-Matlab על ידי הפקודה `rand(m,n)`. הרכיבים של המטריצה שנוצרה כך הם מספרים רנדומים בלתי תלויים בין 0 ו-1.

5. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0.0795 & 0.2823 & 0.3401 \\ 0.6751 & 0.6239 & 0.5186 \\ 0.4583 & 0.8084 & 0.8664 \\ 0.9702 & 0.4152 & 0.1019 \end{pmatrix}$$

יש פירוק לערכים סינגולריים , $A = UDV^T$ כאשר

$$U = \begin{pmatrix} -0.2090 & 0.3023 & -0.8945 & -0.2546 \\ -0.5608 & -0.0539 & 0.3286 & -0.7581 \\ -0.6442 & 0.5322 & 0.1829 & 0.5180 \\ -0.4763 & -0.7890 & -0.2418 & 0.3036 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1.8808 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.6128 & -0.7429 & -0.2694 \\ -0.5994 & 0.2148 & 0.7711 \\ -0.5149 & 0.6340 & -0.5769 \end{pmatrix}$$

העזר בפירוק למצוא:

את מרחב האפס של A ($\mathrm{Ker}(A)$),

את מרחב האפס של A^T ($\mathrm{Ker}(A^T)$),

את התמונה של A ($\mathrm{Im}(A)$),

ואת התמונה של A^T ($\mathrm{Im}(A^T)$).

6. מצא, ב- Matlab, את הערכים העצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

מגודל 20×20.

יהי λ הוא הערך העצמי הכי גדול של A, ו- v הווקטור העצמי הקשור. מצא את הטעות היחסית במטריצה $\lambda^{200} v v^T$ כקירוב ל- A^{200}. הסבר למה

$$A^n \approx \lambda^n v v^T$$

עבור n גדול.

7. (א) אם

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 1 \\ 18 & 25 & 9 & 9 \\ 48 & 68 & 29 & 29 \\ 30 & 39 & 26 & 34 \end{pmatrix}$$

מצא ידנית את פירוק ה-LU של A (בלי pivoting, כלומר ללא מטריצה "P").

(ב) אם

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 1 \\ 18 & 25 & 9 & 9 \\ 0 & 68 & 29 & 29 \end{pmatrix}$$

מצא ידנית את פירוק ה-QR של A. בדוק את התשובות שלך ב-Matlab.

(ג) אם

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 & 4 \\ 2 & 10 & 17 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

מצא ידנית את פירוק ה- Choleski של A.

8. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

יש פירוק Choleski

$$A = L^T L \ , \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

העזר בזה לחשב את הפתרון של $Ax = b$ כאשר

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

אין להשתמש במחשב הכיס!

9. למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -0.808 & 0.914 & -1.380 \\ -1.828 & -0.405 & -0.513 \\ -0.060 & 0.056 & 0.912 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = QR$$

כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} -0.404 & 0.913 & -0.063 \\ -0.914 & -0.405 & -0.004 \\ -0.030 & 0.056 & 0.998 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0 & 1.00 & -1.00 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

(Q, R ל-3 ספרות דיוק). העזר בזה לחשב את תפתרון של $Ax = b$ כאשר

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אין להשתמש במחשב הכיס!