

1. אם

$$A = \begin{pmatrix} 0.1171 & 0.5979 & 0.0653 & 0.9995 & 0.9580 \\ 0.7699 & 0.9492 & 0.2343 & 0.2120 & 0.7666 \\ 0.3751 & 0.2888 & 0.9331 & 0.4984 & 0.6661 \\ 0.8234 & 0.8888 & 0.0631 & 0.2905 & 0.1309 \\ 0.0466 & 0.1016 & 0.2642 & 0.6728 & 0.0954 \end{pmatrix}$$

ו-

$$b = \begin{pmatrix} 0.5347 \\ 0.5515 \\ 0.4496 \\ 0.4105 \\ 0.1983 \end{pmatrix}$$

אזי לפי Matlab הפתרון של $Ax = b$ הוא

$$x = \begin{pmatrix} 0.1773 \\ 0.1992 \\ 0.0981 \\ 0.1835 \\ 0.2140 \end{pmatrix}$$

אבל אם

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0.5350 \\ 0.5509 \\ 0.4499 \\ 0.4109 \\ 0.1977 \end{pmatrix}$$

אזי הפתרון של $A\tilde{x} = \tilde{b}$ הוא

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -2.1011 \\ 2.5030 \\ 1.0770 \\ -0.2878 \\ -0.5200 \end{pmatrix}$$

איך ניתן להסביר שהשינוי הקטן ב- b גרם לשינוי כל כך גדול ב- x ? מצא חסם תחתון על מספר המצב של A .

אם

$$c = \begin{pmatrix} 3.0000 \\ -6.0000 \\ 3.0000 \\ 4.0000 \\ -6.0000 \end{pmatrix}$$

אזי הפתרון של $Ay = c$ הוא

$$y = 10^4 \begin{pmatrix} -2.2784 \\ 2.3039 \\ 0.9789 \\ -0.4713 \\ -0.7340 \end{pmatrix}$$

ואם

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2.9995 \\ -6.0006 \\ 2.9996 \\ 3.9996 \\ -6.0002 \end{pmatrix}$$

אזי הפתרון של $A\tilde{y} = \tilde{c}$ הוא

$$\tilde{y} = 10^4 \begin{pmatrix} -2.2784 \\ 2.3039 \\ 0.9789 \\ -0.4713 \\ -0.7341 \end{pmatrix}$$

איך מסבירים את חוסר הרגישות של y לשינויים ב- c ?

2. המטריצה A היא מגודל $n \times n$, לא סינגולרית, ובעלת פירוק לערכים סינגולריים $A = UDV^T$. נסמן את העמודים של U על ידי u_1, u_2, \dots, u_n , ואת העמודים של V על ידי v_1, v_2, \dots, v_n .

(א) הוכח שאם $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, (ה- x_i מספרים ממשיים) אזי $Ax = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i u_i$, כאשר ה- σ_i הם הערכים הסינגולריים של A .

(ב) הוכח שאם $b = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ (ה- b_i מספרים ממשיים) אזי הפתרון של $Ax = b$ הוא $x = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sigma_i} v_i$.

(ג) אם צריך לפתור את המשוואה $Ax = b$ כאשר $b = b_1 u_1 + b_n u_n$, ובמקום זה פותרים את המשוואה $A\tilde{x} = \tilde{b}$ כאשר $\tilde{b} = (b_1 + \Delta b_1)u_1 + (b_n + \Delta b_n)u_n$, מה הוא היחס בין השגיאה בפלט (כלומר $\|\tilde{x} - x\|_2 / \|x\|_2$) והשגיאה בקלט (כלומר $\|\tilde{b} - b\|_2 / \|b\|_2$) ? האם היחס הזה יכול להיות גדול ? האם הוא בהכרח גדול ?