בס"ד

<u>כלים לאנליזה נומרית 89-214</u>

<u>תרגילים 4</u>

1. לנתונים

x_i	0	1	2	4
y_i	1.2	2.1	2.3	0.5

(א) כתוב את פולינום הביון (פולינום האינטרפולציה) בצורת Lagrange.

(ב) מצא את פולינום הביון (פולינום האינטרפולציה) בצורת Newton.

(ג) מצא את ה-linear spline המחבר את הנתונים.

מצא את הערכים של פולינום הביון וה-linear spline ב-$x=3$. איך היית משתמש ב-Matlab או Scilab כדי למצוא את הערך ב-$x=3$ של ה-cubic spline המחבר את הנתונים ?

2. א. מצא את הפולינום היחיד $p(x)$ מדרגה 2 או פחות כך ש- $p(1)=1$, $p(a)=b$, $p(0)=0$, כאשר $0<a<1$.

ב. הסבר למה הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אינו מונוטוני עולה על הקטע $0 \le x \le 1$ אם $b<0$ או $b>1$. על ידי בדיקת המקרה $a=1/2$, $b=5/6$ הראה שגם אם $0<b<1$ ייתכן ש-$p(x)$ אינו מונוטוני עולה.

ג. הוכח שהפולינום שמצאת בסעיף א. הוא מונוטוני עולה על הקטע $0 \le x \le 1$ אם ורק אם $a^2<b<a(2-a)$.

3. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	α	1	2

כאשר α הוא מספר ממשי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0)=1$, ומצא עוד שני ערכים של x, חוץ מ-0, כך ש-$p'(x)=1$.

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha<0$, $\alpha=0$, $\alpha>0$.

4. א. יהא $p(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a.

ב. יהא $p(x)$ cubic spline עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא, על ידי ניסוי במחשב, את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a עבור a (מספיק לקחת a בין 0 ל-50000).

ג. מה היא המשמעות של התוצאות שמצאת בסעיפים הקודמים לגבי רגישות פולינום הביון ורגישות ה- cubic spline לשינויים בנקודה אחת?

5. הוכח שלכל בחירה של c ו- d הפונקציה

$$z(x) = \begin{cases} (3\,x - 5\,x^2 + 2\,x^3)\,c + (-18\,x^2 + 11\,x + 7\,x^3)\,d & \\ \quad +13\,x + 7\,x^3 - 18\,x^2 & 0 \le x \le 1 \\ (2 + x^2 - 3\,x)\,c + (6 - 7\,x + x^3)\,d & \\ \quad +7 - 8\,x + 3\,x^2 & 1 \le x \le 2 \\ (-27\,x + 18 - 2\,x^3 + 13\,x^2)\,c + (102 - 11\,x^3 + 72\,x^2 - 151\,x)\,d & \\ \quad +79 - 116\,x + 57\,x^2 - 9\,x^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

היא cubic spline לנתונים

x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	3	1

עבור איזה בחירה של c, d מקבלים ספליין טבעי ?

עבור איזה בחירה של c, d מתקיימים תנאי not-a-knot ?