בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214

תרגילים 5

1. מצא את הקו $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7
y_n	1.1	2.3	4.9	6.2	7.2	8.6	9.5

2. מצא את הפרבולה $y = a + bx + cx^2$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7	8
y_n	0.5	-0.3	-1.2	-0.9	0.2	2.4	4.0	7.5

יש למצוא את a, b, c

(א) בהנחה שנותנים משקל שווה לכל הנקודות.

(ב) בהנחה שנותנים משקל 0.5 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 1.0 ל-4 נקודות באמצע.

(ג) בהנחה שנותנים משקל 1.0 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 0.5 ל-4 נקודות באמצע.

בדוק את הרגישות של a, b, c לשינויים קלים בנתונים. (כלומר: אם משנים אחד הנתונים על ידי 1%, בכמה אחוז זה משנה את a, b, c?)

3. אם $y = ax + b$ הוא הקו הישר שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i, y_i)\}$ (כאשר לנקודה (x_i, y_i) מייחסים משקל w_i), מצא:

(א) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i + t, y_i + s)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הזזה).

(ב) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(sx_i, ty_i)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הגדלה/הקטנה).

(ג) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות

$$\{(x_i \cos\theta + y_i \mathrm{sin}\theta, y_i \cos\theta - x_i \mathrm{sin}\theta)\}$$

(כלומר, אותם נקודות אחרי סיבוב). אזהרה - סעיף זה הוא לא כל כך קל!

4. (א) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $e^x \mathrm{sin} x$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^{1} (e^x \mathrm{sin} x - p(x))^2 \, dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

ב) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $f(x) = (1-|x|)/(1+x^2)$ על הקטע $[-1,1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \, dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

ג) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $\sqrt{x}$ על הקטע $[1,9]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{1}^{9} (\sqrt{x} - p(x))^2 \, dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

5. רוצים לעשות קירוב לפונקציה $\sin x$ בקטע $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ על ידי פולינום מהצורה

$$ax + bx^3 + cx^5$$

השווה את 3 הקירובים הבאים על ידי בדיקת צורת הגרף של $|\sin x - ax - bx^3 - cx^5|$:

א) הקירוב שמקבלים מטור טיילור, $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$, $c = \frac{1}{120}$

ב) הקירוב שמקבלים על ידי שיטת ריבועים מזעריים עם פונקצית משקל $w(x) = 1$

ג) הקירוב $a = 0.999695$, $b = -0.165670$, $c = 0.00751339$ (מקבלים את זה מריבועים מזעריים עם $w(x) = (\pi^2 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$)