בס"ד
כלים לאנליזה נומרית 88-276
תרגילים 6

1. מצא קירובים לאנטגרל

$$\int_0^2 \cos(\sin\theta)d\theta$$

(א) על ידי כלל הטרפז עם 64 צעדים.
(ב) על ידי כלל סמפסון עם 64 צעדים.
(ג) על ידי שיטת רומברג המבוסס על כלל הטרפז עם 4,8,16,32,64 צעדים.

אחרי שמצאת קירוב מדויק לאנטגרל על ידי שיטת רומברג, חשב את הטעויות בתוצאות של כלל הטרפז עם 4,8,16,32,64 צעדים. האם הטעויות יורדות כ-$\frac{1}{n^2}$, כאשר n הוא מספר הצעדים?

2. (א) הוכח שנוסחת הקירוב

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(a+\tfrac{1}{2}h) + f(b)\right)\ , \qquad h = b-a$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה לא יותר מ-3. (זה נוסחת הקירוב שעליה מבוסס כלל סמפסון.)

(ב) מצא מקדמים c_1, c_2, c_3 כך שנוסחת הקירוב

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(c_1 f(a) + c_2 f(a+\tfrac{1}{4}h) + c_3 f(a+\tfrac{1}{2}h) + c_2 f(a+\tfrac{3}{4}h) + c_1 f(b)\right)$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה לא יותר מ-5.

3. מצא קירובים לאנטגרל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}dt}{1+7\cos^2 t}$$

על ידי:

(א) כלל הטרפז עם 2 צעדים
(ב) כלל הטרפז עם 2 צעדים בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$ וצעד אחד בקטע $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.
(ג) כלל הטרפז עם צעד אחד בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$ ושני צעדים בקטע $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.
(ד) כלל הטרפז עם 4 צעדים

התשובה המדוייקת לאנטגרל היא $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$. למה לדעתך הקירוב בסעיף ג יותר מוצלח מהקירוב בסעיף ב ?

4. השתמש בתרבוע גאוס עם $4, 6, 8$ ו-10 קודקודים למצוא קירובים לאנטגרל

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

(ניתן למצוא את הקודקודים והמשקלות הרלוונטיים באתר הקורס.)

5. (לא להגשה) יש לקרוא את ה-help על הפקודות quad ו- quadl ב- Matlab. יש לדעת איך להשתמש בפקודות אלה לחישוב אנטגרלים, כולל האופציות לשליטה על הדיוק ולתלות בפרמטרים בתוך האינטגרל. כמו כן יש ללמוד על הפקודה dblquad.

6. כתוב שתי פונקציות ב- Matlab לחשב את

$$f(a) = \int\int_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{a+\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy\ , \qquad a>0\ ,$$

כאשר D הוא

(א) הריבוע $0<x,y<1$

(ב) התחום מעל הפרבולה $y=x^2$ ובתוך העיגול $x^2+y^2=3$.

העזר בפונקציות שכתבתם לצייר גרף של $f(a)$ לשתי הבחירות של D.