טופולוגיה אלגברית 1 – תרגיל 3

1. כזכור, אם γ מסילה ב X מ a ל b, הגדרנו $F_\gamma:\pi_1(X,a)\to\pi_1(X,b)$ באופן הבא: עבור $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$, $F_\gamma([\varphi])=[\bar{\gamma}][\varphi][\gamma]$, והראנו ש F_γ איזומורפיזם. יהי X קשיר מסילתית ויהיו $a,b\in X$. הראה ש $\pi_1(X,a)$ אבלית אמ"ם לכל שתי מסילות γ,δ מ a ל b מתקיים $F_\gamma=F_\delta$.

2. הראה שאם $f:X\to Y$ היא נול-הומוטופית, ו $a\in X$, אז $f_*:\pi_1(X,a)\to\pi_1(Y,f(a))$ הוא ההומומורפיזם הטריויאלי.

3. מ"ט X נקרא **פשוט קשר** אם הוא קשיר מסילתית וכל העתקה $S^1\to X$ היא נול-הומוטופית. הראה שמרחב כויץ הוא פשוט קשר.

4. יהי X מ"ט קשיר מסילתית, ויהיו $a,b,a',b'\in X$. בחר מסילה γ מ a ל a', ומסילה δ מ b ל b' והגדר $F_{\gamma,\delta}:\hat{\Gamma}_{a,b}\to\hat{\Gamma}_{a',b'}$ באופן הבא: $F_{\gamma,\delta}([\varphi]):=[\bar{\gamma}][\varphi][\delta]$. הראה ש $F_{\gamma,\delta}$ חח"ע ועל.

5. יהי X קשיר מסלתית. הראה שהתנאים הבאים על X שקולים:

א. X פשוט קשר.

ב. עבור $a\in X$, $\pi_1(X,a)=\{1\}$.

ג. **לכל** שתי נקודות $a,b\in X$ מתקיים שכל שתי מסילות מ a ל b הומוטופיות ביחס ל ∂I.

ד. **קיימות** שתי נקודות $a,b\in X$ עבורן מתקיים הנ"ל.

6. תהי A טבעת, כלומר $A=S^1\times I$. הראה ש $S^1\times\{\frac{1}{2}\}\subseteq A$ הוא נסג עיוותי.