תכנית לא סופית לקורס מבוא לטופולוגיה 88220 - טל נוביק – תשפ"א

רשימה סופית של החומר לבחינה תפורסם בסוף הקורס

מרחבים מטריים: (סעיפים 1 – 31 נוגעים אך ורק למרחבים מטריים!)

1. הגדרת מרחב מטרי, והגדרת המטריקה המושרה על תת מרחב.
2. הגדרת התכנסות סדרה במרחב מטרי.
3. לסדרה במרחב מטרי יש לכל היותר גבול אחד.
4. $x_n \to a$ אם"ם $d(x_n,a)\to 0$.
5. הגדרה שקולה להתכנסות סדרה שבה לא מוזכר הסדר על הטבעיים. מסקנה: התכנסות סדרה איננה תלויה בסידור אברי הסדרה.
6. הגדרת סדרת קושי.
7. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.
8. מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא מרחב מטרי שלם.
9. הגדרת כדור פתוח $B(x,r)$.
10. הגדרת רציפות של פונקציה f בנקודה a .
11. פונקציה f רציפה בנקודה a אם"ם לכל סדרה $\{x_n\}$ המקיימת $x_n \to a$ מתקיים $f(x_n)\to f(a)$.
12. $f: M \to N$ נקראת רציפה אם היא רציפה בכל נקודות M .
13. הגדרת קבוצה פתוחה במרחב מטרי.
14. כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.
15. המרחב כולו והקבוצה הריקה פתוחות. אחוד של אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה. חיתוך של אוסף סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
16. f רציפה ב a אם"ם לכל סביבה U של $f(a)$ יש סביבה V של a כך ש $f(V)\subseteq U$.
17. $f: M \to N$ רציפה אם"ם לכל $U \subseteq N$ פתוחה ב N מתקיים ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב M .
18. עבור תת מרחב $A \subseteq M$ מתקיים ש $U \subseteq A$ פתוחה ב A אם"ם יש $V \subseteq M$ פתוחה ב M כך ש $U = V \cap A$.
19. הגדרת מטריקות שקולות.
20. הגדרת קבוצה סגורה.
21. התכונות של קבוצות סגורות הנובעות מהתכונות של קבוצות פתוחות המופיעות בסעיף 15.
22. קבוצה $S \subseteq M$ היא סגורה אם"ם לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב S המתכנסת לנקודה $a \in M$, מתקיים ש $a \in S$.
23. הגדרת קומפקטיות.
24. הגדרת מספר לבג של כיסוי.
25. מרחב מטרי M הוא קומפקטי אם"ם לכל סדרת נקודות ב M יש תת סדרה מתכנסת.

26. טענת עזר א' בהוכחת סעיף 25: תהי $\{x_n\}$ סדרת נקודות במרחב מטרי M ותהי $a \in M$. אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $x_n \neq a$ כך ש $d(x_n, a) < \varepsilon$ אז יש ל $\{x_n\}$ תת סדרה שמתכנסת ל a.
27. טענת עזר ב' בהוכחת סעיף 25: אם M מרחב מטרי שבו לכל סדרת נקודות יש תת סדרה מתכנסת, אז לכל כסוי פתוח של M יש מספר לבג.
28. מסקנה מסעיפים 25 ו 27: לכל כסוי פתוח של מרחב מטרי קומפקטי יש מספר לבג.
29. הגדרת מרחב מטרי חסום: קיים r כך שלכל $x, y \in M$ מתקיים $d(x, y) < r$.
30. משפט היינה בורל: תת מרחב של $\mathbb{R}^n$ הוא קומפקטי אם"ם הוא קבוצה סגורה וחסומה.
31. דוגמה למרחב מטרי שבו יש קבוצות סגורות וחסומות שאינן קומפקטיות.

הלמה השימושית:

תהי A קבוצה, ונניח שלכל $x \in A$ נתונה קבוצה E_x המקיימת $x \in E_x \subseteq A$.

אזי $$A = \bigcup_{x \in A} E_x$$

<u>מרחבים טופולוגיים:</u>

32. הגדרת מרחב טופולוגי.
33. הגדרת מרחב טופולוגי מטריזבילי.
34. הגדרת פונקציה רציפה.
35. העתקת הזהות רציפה, העתקה קבועה רציפה. הרכבה של העתקות רציפות היא רציפה.
36. הגדרת רציפות בנקודה.
37. פונקציה היא רציפה אם"ם היא רציפה בכל נקודה.
38. הטופולוגיה המושרה על תת מרחב.
39. עבור $A \subseteq B \subseteq X$, הטופולוגיה המושרה מ X ל B ואח"כ מ B ל A מתלכדת עם הטופולוגיה שמושרה ישירות מ X ל A.
40. העתקת ההכלה היא רציפה.
41. צמצום של העתקה רציפה היא רציפה.
42. תהי $f : X \to Y$, תהי $B \subseteq Y$ המקיימת ש $f(X) \subseteq B$, ותהי $\tilde{f} : X \to B$ הפונקציה המתקבלת מ f ע"י צמצום הטווח. אזי $\tilde{f}$ רציפה אם"ם f רציפה.
43. הגדרת קבוצות סגורות, והתכונות שלהם הנובעות מהגדרת טופולוגיה.
44. העתקה היא רציפה אם"ם תמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.

45. הגדרת העתקה פתוחה והעתקה סגורה.
46. עבור תת מרחב $A\subseteq X$ מתקיים ש $S\subseteq A$ סגורה ב A אם"ם יש $Q\subseteq X$ סגורה ב X כך ש $S=Q\cap A$.
47. אם $U\subseteq A\subseteq X$, ו U פתוחה ב X אז U פתוחה ב A.
48. אם $U\subseteq A\subseteq X$, U פתוחה ב A ו A פתוחה ב X, אז U פתוחה ב X.
49. כמו סעיפים 47, 48 כאשר המילה "פתוחה" מוחלפת בכל מקום במילה "סגורה".
50. ששת התנאים הבאים על העתקה $f:X\to Y$ שקולים. העתקה שמקיימת תנאים אלה נקראת הומאומורפיזם:
(א) f חח"ע, על, רציפה, וההעתקה ההפוכה גם רציפה. (ב) f חח"ע, על, רציפה ופתוחה. (ג) f חח"ע, על, רציפה וסגורה. (ד) f חח"ע ועל, ולכל $G\subseteq X$ מתקיים ש G פתוחה ב X אם"ם $f(G)$ פתוחה ב Y. (ה) f חח"ע ועל, ולכל $G\subseteq Y$ מתקיים ש G פתוחה ב Y אם"ם $f^{-1}(G)$ פתוחה ב X. (ו) f רציפה, ויש $g:Y\to X$ רציפה כך ש $g\circ f=Id_X$ ו $f\circ g=Id_Y$.
51. הגדרת $X\cong Y$. זהו יחס שקילות.
52. כל הקטעים הפתוחים למיניהם ב $\mathbb{R}$, כלומר הקבוצות מהצורה (a,b), (a,∞), $(-\infty,a)$, $(-\infty,\infty)$, הומאומורפיים זה לזה. כל הקטעים הסגורים למיניהם ב $\mathbb{R}$, כלומר הקבוצות מהצורה $[a,b]$, הומאומורפיים זה לזה.
כל הקטעים החצי פתוחים חצי סגורים למיניהם ב $\mathbb{R}$ כלומר הקבוצות מהצורה $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$, הומאומורפיים זה לזה.
53. הגדרת פנים וסגור, ותכונותיהם הבסיסיות.
54. נקודה p נמצאת בסגור של קבוצה A אם"ם כל סביבה של p חותכת את A.
55. עבור $A\subseteq B\subseteq X$, הקשר בין הסגור של A ב B לסגור של A ב X.
56. הגדרת קבוצה צפופה.
57. A צפופה ב X אם"ם כל קבוצה פתוחה לא ריקה ב X חותכת את A.
58. עבור $A\subseteq B\subseteq X$, A צפופה ב B אם"ם הסגור של A ב X מכיל את B.
59. אם $f:X\to Y$, $\{U_\alpha\}$ כיסוי של X ע"י קבוצות פתוחות, ו $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל α, אז f רציפה.
60. כמו סעיף 59 רק שהקבוצות סגורות, ואוסף הקבוצות הוא סופי.
61. הגדרת מרחב קשיר.
62. תמונה רציפה של מרחב קשיר היא מרחב קשיר.
63. מרחב X הוא לא קשיר אם"ם יש פונקציה רציפה $f:X\to\mathbb{R}$ כך ש $f(X)=\{0,1\}$. מכאן שכל מרחב שלגביו הוכח בעבר משפט ערך הביניים הוא קשיר. למשל, כל הקטעים למיניהם ב $\mathbb{R}$ (כולל $\mathbb{R}$ עצמו).
64. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$. אם יש $x<y<z\in\mathbb{R}$ כך ש $x,z\in A$ ו $y\notin A$, אז A לא קשיר.
65. תתי המרחבים הקשירים של $\mathbb{R}$ הם כל הקטעים למיניהם.
66. אם $X=U\cup V$ כאשר U,V פתוחות זרות, ואם $A\subseteq X$ קשיר, אז $A\subseteq U$ או $A\subseteq V$.
67. אם $A\subseteq X$, A קשיר, ו A קבוצה צפופה ב X, אז X קשיר.

(לעניין תכונות בזכר ♂ ובנקבה ♀ , מסיבות דידקטיות אני נוהג כך: אם התכונה של A היא תכונה שלה כ**תת קבוצה** של X , אז היא נרשמת בנקבה, למשל **פתוחה**, **צפופה**. אם התכונה של A היא תכונה שלו כ**מרחב בפני עצמו**, אז היא נרשמת בזכר, למשל **קשיר**, **קומפקטי**.)

68. יהיו $A,B\subseteq X$. אם A ו B קשירים, ו $A\cap B\neq\emptyset$, אז $A\cup B$ קשיר.
69. מרחב X הוא קשיר אם"ם הוא מקיים את התכונה הבאה:
לכל שתי נקודות $a,b\in X$ יש תת מרחב קשיר $A\subseteq X$ כך ש $a,b\in A$.
70. שלושת סוגי הקטעים ב $\mathbb{R}$ לא הומאומורפיים זה לזה.
71. הגדרת רכיבי קשירות.
72. אם A תת מרחב קשיר של X אז A מוכל באחד מרכיבי הקשירות של X .
73. רכיבי הקשירות הם קשירים.
74. רכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות ב X .
75. אם יש רק מספר סופי של רכיבי קשירות, אז הם גם קבוצות פתוחות.
76. X קשיר אם"ם יש רק רכיב קשירות אחד.
77. רכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ הם היחידונים. בפרט, רכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ אינם קבוצות פתוחות.
78. הגדרת מסילה, שרשור מסילות, המסילה ההפוכה.
79. הגדרת מרחב קשיר מסילתית.
80. מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר.
81. תמונה רציפה של מרחב קשיר מסילתית היא מרחב קשיר מסילתית.
82. הגדרת רכיבי קשירות מסילתית.
83. רכיבי הקשירות המסילתית הם קשירים מסילתית.
84. אם A תת מרחב קשיר מסילתית של X אז A מוכל באחד מרכיבי הקשירות המסילתית של X .
85. X קשיר מסילתית אם"ם יש רק רכיב קשירות מסילתית אחד.
86. כל רכיב קשירות מסילתית מוכל באחד מרכיבי הקשירות.
87. דוגמה למרחב שהוא קשיר אך לא קשיר מסילתית.
88. הגדרת מרחב טופולוגי קומפקטי. הגדרה שקולה עם קבוצות סגורות, ע"י מעבר למשלימים.
89. תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא מרחב קומפקטי.
90. קבוצה סגורה במרחב קומפקטי, היא מרחב קומפקטי.
91. עבור תת מרחב $A\subseteq X$, הגדרת כיסוי פתוח של A ב X .
92. תת מרחב $A\subseteq X$ הוא קומפקטי אם"ם לכל כיסוי פתוח של A ב X יש תת כיסוי סופי.
93. הגדרת מרחב האוסדורף. נקרא גם T_2.
94. כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.
95. במרחב האוסדורף כל נקודון הוא קבוצה סגורה. תכונה זו נקראת T_1.
96. עבור קבוצה אינסופית X, הטופולוגיה הקו-סופית על X היא T_1 אך לא T_2.

97. תת מרחב של מרחב האוסדורף הוא האוסדורף.

98. יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף ויהיו $A,B\subseteq X$ שני תתי מרחבים קומפקטיים זרים. אזי קיימות $U,V\subseteq X$ פתוחות זרות כך ש $A\subseteq U,\ B\subseteq V$.

99. תת מרחב קומפקטי של מרחב האוסדורף, הוא קבוצה סגורה.

100. אם X קומפקטי, Y האוסדורף, ו $f:X\to Y$ רציפה, אז f סגורה.

101. אם X קומפקטי, Y האוסדורף, ו $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל, אז f הומאומורפיזם.

102. הגדרת שיכון.

103. אם X קומפקטי, Y האוסדורף, ו $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע, אז f שיכון.

104. הגדרת בסיס לטופולוגיה. (שתי הגדרות שקולות).

105. למרחב מטרי יש בסיס בן מניה אם"ם יש בו קבוצה צפופה בת מניה.

106. כיוון אחד של הטענה הקודמת נכון בכל מרחב טופולוגי. דוגמה נגדית עבור הכיוון השני: במרחב סורגנפריי יש קבוצה צפופה בת מניה אך אין בסיס בן מניה. מסקנה: מרחב סורגנפריי איננו מטריזבילי.

107. ל $\mathbb{R}^n$ יש בסיס בן מניה. נובע מכאן שהטופולוגיה על $\mathbb{R}^n$ היא בעצמת הרצף.

108. אם B בסיס לטופולוגיה של Y, אזי $f:X\to Y$ רציפה אם"ם לכל $V\in B$, $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X .

109. אם B בסיס לטופולוגיה של X, אזי $f:X\to Y$ פתוחה אם"ם לכל $V\in B$, $f(V)$ פתוחה ב Y.

110. אם B בסיס לטופולוגיה של X ו $A\subseteq X$, אז אוסף כל הקבוצות מהצורה $V\cap A$ עבור $V\in B$, הוא בסיס לטופולוגיה של A.

111. אם B בסיס לטופולוגיה של X ו $A\subseteq X$, אזי A צפופה ב X אם"ם כל $\varnothing\neq V\in B$ חותכת את A .

112. אם B בסיס לטופולוגיה של X אזי X קומפקטי אם"ם לכל כיסוי של X ע"י קבוצות מ B יש תת כיסוי סופי.

113. תנאי הכרחי ומספיק לכך שאוסף תתי קבוצות של קבוצה X הוא בסיס לטופולוגיה על X .

114. הגדרת טופולוגית המכפלה על $X_1\times\cdots\times X_n$.

115. ההטלות $p_k:X_1\times\cdots\times X_n\to X_k$ הן רציפות ופתוחות.

116. פונקציה $f:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$ רציפה אם"ם $p_k\circ f$ רציפה לכל $1\le k\le n$.

117. עבור $A\subseteq X$ ו $B\subseteq Y$, הטופולוגיה של $A\times B$ כתת מרחב של $X\times Y$ מתלכדת עם הטופולוגיה שלו כמכפלה של A ו B.

118. אם B_i בסיס לטופולוגיה של X_i , $i=1,\dots,n$, אז אוסף כל הקבוצות מהצורה $V_1\times\cdots\times V_n$ כאשר $V_i\in B_i$, $i=1,\dots,n$, הוא בסיס לטופולוגיה של $X_1\times\cdots\times X_n$.

119. הטופולוגיה על $(X_1\times\cdots\times X_k)\times(X_{k+1}\times\cdots\times X_n)$ מתלכדת עם זו על $X_1\times\cdots\times X_n$ (תחת הזיהוי הטבעי בין שתי קבוצות אלו).

120. הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$ מתלכדת עם טופולוגית המכפלה $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$.

121. מכפלת מרחבים האוסדורף היא מרחב האוסדורף.

122. מכפלת מרחבים קשירים מסילתית היא מרחב קשיר מסילתית.

123. מכפלת מרחבים קשירים היא מרחב קשיר.

124. מכפלת מרחבים קומפקטיים היא מרחב קומפקטי.

125. אם $f,g:X\to\mathbb{R}$ רציפות, אז $f+g$ ו $f\cdot g$ רציפות, ואם גם $\dfrac{f}{g}$ מוגדרת, כלומר g לא מתאפסת, אז גם $\dfrac{f}{g}$ רציפה.

126. הגדרת $f_1\times\cdots\times f_n:X_1\times\cdots\times X_n\to Y_1\times\cdots\times Y_n$.

127. אם לכל $1\le k\le n$, $f_k:X_k\to Y_k$ רציפה, אז $f_1\times\cdots\times f_n$ רציפה.

128. הגדרת איחוד זר של מרחבים טופולוגיים. התכונה הבסיסית לגבי מתי העתקה מאיחוד זר למרחב אחר היא רציפה.

129. הגדרת העתקת מנה.

130. תנאי שקול להגדרת העתקת מנה, באמצעות קבוצות סגורות.

131. יהיו $f:X\to Y, g:Y\to Z$, ונניח ש f היא העתקת מנה. אזי g רציפה אם"ם $g\circ f$ רציפה.

132. יהיו $f:X\to Y, g:Y\to Z$, ונניח ש f היא העתקת מנה. אזי g העתקת מנה אם"ם $g\circ f$ העתקת מנה.

133. העתקת מנה חח"ע היא הומאומורפיזם.

134. העתקה שהיא רציפה פתוחה ועל היא העתקת מנה.

135. העתקה שהיא רציפה סגורה ועל היא העתקת מנה.

136. אם $f:X\to Y$ רציפה ויש $A\subseteq X$ כך ש $f|_A:A\to Y$ העקת מנה, אז גם $f:X\to Y$ העתקת מנה.

137. הגדרת מרחב מנה וההעתקה הקנונית $\rho:X\to\hat{X}$.

138. התכונה הבסיסית לגבי מתי העתקה ממרחב מנה למרחב אחר היא רציפה. (עפ"י סעיף 131)

139. אם $f:X\to Y$ העתקת מנה, ואם $\hat{X}$ מרחב המנה של X המתקבל מיחס השקילות שאותו f מכבד מאוד, אז ההעתקה $\hat{f}:\hat{X}\to Y$ המושרה ע"י f היא הומאומורפיזם. (עפ"י סעיף 132 ו 133)

140. דוגמאות למרחבי מנה של $\mathbb{R}$ ושל $[0,1]$ שהומאומורפיים ל S^1, ודוגמה למרחב מנה של $\mathbb{R}$ שהומאומורפי ל $[0,\infty)$.

141. מרחבי מנה שונים של הריבוע.