תקציר הרצאות בחשבון אינפיניטסימלי 1

בועז צבאן

10 בפברואר 2020

תוכן עניינים

תקציר זה כולל, עבור חלק מהטענות (בדרך כלל, אלה שאינן מיידיות מההגדרות, או העברת אגפים), את רעיון ההוכחה המרכזי (בצבע כחול), בשורה נפרדת. את פרטי ההוכחות תמצאו בספר של מייזלר או בסיכומי ההרצאות.

מוסכמות: האותיות a, b, c, s, x, y, z (עם או בלי אינדקסים) וכן אותיות יוניות ϵ, δ, η מציינות תמיד מספרים ממשיים, והאותיות k, l, m, n, N מציינות תמיד מספרים טבעיים (אלא אם כתוב במפורש אחרת). האותיות A, B, C, X, Y, Z מציינות תמיד קבוצות של מספרים ממשיים.

טענות שכתובות בלי כמתים ("לכל" או "קיים"), הכוונה שהן נכונות לכל אובייקט שמופיע בטענה.

כמתים מתייחסים תמיד למשתנה שעדיין פנוי. למשל "לכל a ולכל $b<a$, מתקיים ..." פירושו "לכל a ולכל b כך ש $b<a$, מתקיים ...".

(למרצה: לשקול האם כדאי להגדיר רציפות בלי תנאי הסף (כך שהיא מתקיימת באופן ריק בנקודות שאינן נקודות הצטברות), ולהוכיח את הרציפות של פונקציה הפוכה לפונקציה מונוטונית ממש באופן כללי. האם זה מסרבל/מבלבל איפהשהו?)

1 חסמים

1.1 הפרדוקס של זנו

1. (מתאבן) **הפרדוקס של זנו**: תנועה מנקודה לנקודה אינה אפשרית.
יש לעבור את מחצית הדרך, ואת מחצית הדרך שנותרה, ואת מחצית הדרך שנותרה, ואין סוף לדבר.
פתרון התעלומה בהמשך הקורס.

1.2 הישר הממשי

1. המספרים **הממשיים**: $\mathbb{R}$ - כל המספרים שניתקל בהם בקורס, כולל (בנוסף לכל המספרים הרציונלים) $\sqrt{2}$, π, e, וכולי.
2. הקבוצה $\mathbb{R}$ **סדורה**: יש יחס סדר בין האיברים כך שלכל שני איברים בקבוצה, אחד מהם גדול מהשני (סדר מלא). יש קשר בין הסדר לפעולות השדה:
   (א) אם $a \le b$ אז $a+c \le b+c$ לכל c.
   (ב) אם $a \le b$ אז $ac \le bc$ לכל $0 \le c$.
3. מהתכונות הנ"ל אפשר להוכיח את כל התכונות המוכרות של הסדר של מספרים ממשיים, כגון (תרגיל למעוניינים):
   (א) ניתן לחבר אי שויונים: אם $a \le b$ ו $c \le d$, אז $a+c \le b+d$.
   (ב) a חיובי $\iff$ $-a$ שלילי.
   (ג) אם a חיובי אז גם a^{-1} חיובי.
4. **קטעים** ב $\mathbb{R}$ עבור מספרים ממשיים $a<b$:
   (א) $(a,b) := \{x : a<x<b\}$ **קטע פתוח**.
   (ב) $[a,b] := \{x : a \le x \le b\}$ **קטע סגור**.
   (ג) $[a,b) := \{x : a \le x < b\}$.
   (ד) $(a,b] := \{x : a < x \le b\}$.

1.3 חסמים

1. **מקסימום** של קבוצה, $\max A$: האיבר הגדול ביותר שלה.
2. **מינימום** של קבוצה, $\min A$: האיבר הקטן ביותר שלה.
3. אם יש מינימום (או מקסימום) לקבוצה, אז הוא יחיד.
4. דוגמאות: $\max[a,b] = \max(a,b] = b$. לקבוצות $[a,b),(a,b)$ אין מקסימום.
5. $A \le b$ פירושו: $a \le b$ לכל $a \in A$.
אם יש $A \le b$, נאמר שהקבוצה A **חסומה מלעיל** , ושהמספר b הוא **חסם מלעיל** של A.
6. $b \not\le A$ $\iff$ יש ב A איבר גדול מ b.
7. **סופרמום (חסם עליון)** של קבוצה A, מסומן $\sup A$: חסם מלעיל מינימלי של A (הכי קטן מכל החסמים מלעיל של הקבוצה).
$\sup A = \min\{x : A \le x\}$.
8. כמינימום של קבוצה, $\sup A$ יחיד (אם הוא קיים).
9. דוגמאות:
   (א) החסם העליון של קטע (מכל סוג) הוא הקצה הימני שלו.
   (ב) $\sup\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\} = 0$.
   (ג) הקבוצה $\{1,2,3,\ldots\}$ אינה חסומה מלעיל.

10. אם $s=\sup A$ אז לכל $b<s$ יש $b<a\in A$.

11. לקבוצה $\emptyset$ אין חסם עליון. לקבוצה שאינה חסומה מלעיל אין חסם עליון.

12. **אקסיומת החסם העליון:** לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל ב $\mathbb{R}$ יש חסם עליון.

13. אם $a:=\max A$ קיים, אז a הוא גם החסם העליון של A.

14. $b=\sup A \iff b\geq A$ ולכל $c<b$ יש ב A איבר גדול מ c.

15. האייטמים בסעיף זה מקבילים לגמרי לסעיפים קודמים, ונשארים כתרגיל.

(א) דוגמאות: $a=\min[a,b]=\min[a,b)$. לקבוצות $(a,b],(a,b)$ אין מינימום.

(ב) $A\geq b$ פירושו: $a\geq b$ לכל $a\in A$.
אם יש $A\geq b$, נאמר שהקבוצה A **חסומה מלרע** ושהמספר b הוא **חסם מלרע** של A.

(ג) $A\not\geq b \iff$ יש ב A איבר קטן מ b.

(ד) **אינפימום (חסם תחתון)** של קבוצה A, מסומן $\inf A$: חסם מלרע מקסימלי (הכי גדול מכל החסמים מלרע של הקבוצה).
$\inf A=\max\{x:x\leq A\}$.

(ה) דוגמאות: החסם התחתון של קטע (מכל סוג) הוא הקצה השמאלי שלו. $\inf\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots\right\}=-\frac{1}{2}$.

(ו) אם $a:=\min A$ קיים, אז a הוא גם החסם התחתון של A.

(ז) $b=\inf A \iff b\leq A$ ולכל $c>b$ יש ב A איבר קטן מ c.

16. לקבוצה $\emptyset$ אין חסם תחתון. לקבוצה שאינה חסומה מלרע אין חסם תחתון.

17. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע יש חסם תחתון.
$\sup(-A)=-\inf(A)$.

1.4 תכונת ארכימדס וצפיפות המספרים הרציונלים

1. **תכונת ארכימדס:** לכל $\epsilon>0$ ולכל x יש n כך ש $n\epsilon>x$.
אם $\sup\mathbb{N}\epsilon-\epsilon<n\epsilon$ אז $\sup\mathbb{N}\epsilon<(n+1)\epsilon\in\mathbb{N}\epsilon$.

2. $\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע.

3. * לקבוצת שלמים לא ריקה וחסומה מלעיל יש מקסימום.
$s:=\sup A$. יש $s-1<n\in A$ ולכן $s<n+1\leq m\notin A$ לכל $m>n$.

4. **צפיפות $\mathbb{Q}$ ב $\mathbb{R}$:** בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונלי.
יהיו $a<b$. רוצים רציונלי $a<\frac{m}{n}<b$. מארכימדס, יש n עם $\frac{1}{n}<b-a$. מארכימדס, הקבוצה הבאה (לא ריקה ו)חסומה מלעיל ולכן

$$m:=\max\left\{k\in\mathbb{Z}:\frac{k}{n}\leq a\right\}=\max\{k\in\mathbb{Z}:k\leq na\}+1$$

קיים ומתאים.

5. תזכורת: אין פתרון ב $\mathbb{Q}$ למשוואה $x^2=2$: $\sqrt{2}$ אירציונלי.
אילו $(\frac{m}{n})^2=2$ והשבר מצומצם, אז $m^2=2n^2$ ולכן m זוגי ולכן n זוגי. סתירה.

6. (בתרגיל) השדה $\mathbb{Q}$ אינו מקיים את אקסיומת החסם העליון: לקבוצה $\{x\in\mathbb{Q}:x<\sqrt{2}\}$ אין חסם עליון רציונלי.
החסם העליון חייב להיות $\sqrt{2}$: אילו הסופרמום ב $\mathbb{Q}$ היה s אז $s>\sqrt{2}$, ואז יש רציונלי $\sqrt{2}<q<s$.

2 סדרות והתכנסות

2.1 אי־שיוויון המשולש

1. **ערך מוחלט של מספר ממשי:** $|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

2. תכונות בסיסיות:

(א) $-x, x \leq |x| = |-x|$.

(ב) $|x| \leq a \iff -x, x \leq a$.

(ג) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

3. * **אי־שיוויון המשולש:** $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

$|x+y| \leq |x| + |y|$: $-|x| - |y| \leq -x - y, x + y \leq |x| + |y|$.

$||x| - |y|| \leq |x - y|$: $|x+y| - |y| \leq |x|$. נציב $z = x + y$ לקבל $|z| - |y| \leq |z - y|$. החלפת שמות y, z נותנת $|y| - |z| \leq |y - z|$.

4. מסקנה מאי־שיוויון המשולש (הכיוון הרגיל): $|x - y| \leq |x - a| + |a - y|$.

$x - y = x - a + a - y$.

2.2 סדרות

1. **סידרה:** התאמה של מספר ממשי a_n לכל מספר טבעי n.

הסידרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ מסומנת גם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ובקיצור (a_n).

(יש מסמנים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

פורמלית, סידרה היא פונקציה $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, כלומר $a_n = f(n)$ לכל n.

2. דוגמאות:

(א) $a_n := \frac{1}{n}$.

(ב) $a_n = (-1)^n$.

(ג) a_n היא הספרה ה n בפיתוח העשרוני של π (אין דרישה שההגדרה תהיה בעזרת נוסחה מפורשת).

2.3 התכנסות

1. סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת/שואפת לגבול** a (סימון: $a_n \longrightarrow a$) אם: לכל $0 < \epsilon$ יש N כך שמתקיים: $|a_n - a| \leq \epsilon$ לכל $N \leq n$.

"ממקום מסויים בסדרה ואילך, מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$".

"**לבסוף**, מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$".

2. דוגמאות:

(א) $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

(ב) $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$.

(ג) $c \longrightarrow c$.

3. $|a_n - a| \leq \epsilon \iff a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$ (ובדומה עבור $<$ במקום $\leq$).

4. **סביבה** של מספר a: קטע מהצורה $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, כאשר $0 < \epsilon$.

5. $a_n \longrightarrow a \iff$ לכל סביבה של a, לבסוף אברי הסידרה נמצאים בה.

6. * התכונות הבאות שקולות:

(א) $a_n \longrightarrow a$, כלומר: לכל $0 < \epsilon$ יש N כך שמתקיים: $|a_n - a| \leq \epsilon$ לכל $N \leq n$.

(ב) לכל $0 < \epsilon$ יש N כך שמתקיים: $|a_n - a| < \epsilon$ לכל $N \leq n$.

(ג) יש קבוע $0 < c$ שעבורו: לכל $0 < \epsilon$ יש N כך שמתקיים: $|a_n - a| \leq c\epsilon$ לכל $N \leq n$.

7. תרגיל:

(א) בכל התכונות השקולות לעיל, אם נחליף את "$N \leq n$" ב"$N < n$", נקבל עדיין תכונה שקולה.
(ב) בתכונות לעיל, אם נחליף "$0 < \epsilon$" ב"$0 \leq \epsilon$" נקבל תכונה חזקה מדיי, שאינה שקולה להתכנסות.

8. דוגמא: הסידרה $(-1)^n$ אינה מתכנסת.
"לבסוף", $|1-a|, |-1-a| \leq \epsilon$ אז מאש"מ $|1-(-1)| \leq |1-a| + |a-(-1)| \leq 2\epsilon$.

9. **יחידות הגבול:** אם $a_n \longrightarrow a, b$ אז $a = b$.
לבסוף, $|a_n - a|, |a_n - b| \leq \epsilon$, ואז $|b-a| \leq |b-a_n| + |a_n - a| \leq 2\epsilon$.

10. סימונים נפוצים נוספים להתכנסות סדרה לגבול:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$$\lim a_n = a$$
$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

11. לקריאה עצמית: התכנסות/התבדרות סידרה תלויה רק בזנב: אינה מושפעת על ידי שינוי מספר סופי של אברי הסידרה.
לכן בדיונים על גבולות נרשה גם שמספר סופי של איברים בסדרה אינו מוגדר.

3 חשבון גבולות

3.1 סכום

1. נאמר שאברי סידרה a_n מקיימים תכונה מסויימת **לבסוף** (או: **לכמעט כל** n) אם יש N כך שלכל $N \leq n$ האיבר a_n מקיים את התכונה.
2. $a_n \longrightarrow a$ פירושו: לכל ϵ חיובי, לבסוף $|a_n - a| \leq \epsilon$.
3. אם $a_n \longrightarrow a$ ו $b_n \longrightarrow b$, אז $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.
$(a_n + b_n) - (a+b) = (a_n - a) + (b_n - b)$.

3.2 סדרות חסומות

1. **סידרה חסומה:** סידרה חסומה מלעיל ומלרע.
שקול: יש c כך ש $|a_n| \leq c$ לכל n.
2. כל סידרה מתכנסת היא חסומה.
לבסוף, $a - 1 \leq a_n \leq a + 1$, וניתן לחסום את האיברים הראשונים.
3. אם (a_n) חסומה ו $b_n \longrightarrow 0$ אז $a_n b_n \longrightarrow 0$.
$|a_n b_n| \leq c\,|b_n| \leq c\epsilon$.

3.3 מכפלה

1. אם $a_n \longrightarrow a$ ו $b_n \longrightarrow b$, אז $a_n b_n \longrightarrow ab$.
$a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab$, ולבסוף $|b_n| \leq c$.
(ההוכחה תעבוד גם אם נשתמש באמצע $a_n b$ במקום $a b_n$.)
2. מסקנות:

(א) אם $a_n \longrightarrow a$, אז $b a_n \longrightarrow ba$ לכל b.
(ב) אם $a_n \longrightarrow a$ ו $b_n \longrightarrow b$, אז $a_n - b_n \longrightarrow a - b$.

3. ייתכן שהסדרה $a_n + b_n$ מתכנסת למרות שאף אחת מהסדרות a_n, b_n אינה מתכנסת.
אבל אם הסכום מתכנס וגם אחת מהן מתכנסת, אז גם השניה מתכנסת.

3.4 מנה

1. * אם $a_n \longrightarrow a$ אז $|a_n| \longrightarrow |a|$.
(הכיוון ההפוך אינו נכון.)

2. אם $a \neq 0 \longleftarrow a_n \neq 0$ אז $\frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$.
במכנה של ההפרש, לבסוף $|a_n| \geq \frac{|a|}{2}$.

3. אם $a \neq 0 \longleftarrow a_n \neq 0$ ו $b \longleftarrow b_n$, אז $\frac{b_n}{a_n} \longrightarrow \frac{b}{a}$.

4. דוגמא: חישוב הגבול של $\frac{2n^2-3n+1}{n^2+n+7}$.
$\frac{2n^2-3n+1}{n^2+n+7} = \frac{2-3\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n}+7\left(\frac{1}{n}\right)^2}$.

4 סדרות מונוטוניות ואי־שיוויונים

4.1 סדרות מונוטוניות

1. סידרה (a_n) היא:
(א) **עולה** אם $a_n \leq a_{n+1}$ לכל n.
(ב) **עולה ממש** אם $a_n < a_{n+1}$ לכל n.
(ג) **יורדת** אם $a_n \geq a_{n+1}$ לכל n.
(ד) **יורדת ממש** אם $a_n > a_{n+1}$ לכל n.
(ה) **מונוטונית** אם היא עולה או יורדת.

2. כל סידרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.
סידרה עולה/יורדת וחסומה מתכנסת לסופרמום/אינפימום שלה, בהתאמה.
לטענה הראשונה: אם $s - \epsilon < a_N \leq s$ אז גם כל הבאים כך.

3. * אם $q \neq 1$ והסידרה q^n מתכנסת, אז גבולה הוא 0.
$t \longleftarrow q^{n+1} = qq^n \longrightarrow qt$, כזנב של הסידרה (q^n).

4. * $a_n \longrightarrow 0 \iff |a_n| \longrightarrow 0$.

5. * אם $|q| < 1$ אז $q^n \longrightarrow 0$.
על ידי ערך מוחלט, עוברים למקרה $0 \leq q < 1$.
$0 \leq q^n$ יורדת ולכן מתכנסת.

6. דוגמא: $a_1 := \sqrt{2}$ ו $a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}$ לכל n.
עולה: באינדוקציה. $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$.
חסומה: $a_n < 2$ באינדוקציה: $\sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$.
$a_{n+1}^2 = 2 + a_n$ ולכן הגבול מקיים $a^2 - a - 2 = 0$ ולכן $a = 2$.
כתיבה לא פורמלית: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2$.

4.2 אי־שיוויון בין הגבולות

1. תזכורת:
(א) עבור $0 < \epsilon$, קטע מהצורה $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ ייקרא **סביבה** של a.
(ב) לכל n: $|a_n - a| < \epsilon \iff a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

2. גבולות שומרים על אי־שיוויון חלש: אם $b \longleftarrow b_n \geq a_n \longrightarrow a$, אז $a \leq b$. בפרט:
(א) אם $a_n \leq b$, $a \longleftarrow a_n$, אז $a \leq b$.
(ב) אם $b \longleftarrow b_n$, $a \leq b_n$, אז $a \leq b$.
בדרך השלילה, לוקחים סביבות זרות של הגבולות.

3. ייתכן $a_n < b$ ועדיין $\lim a_n = b$: $-\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

4.3 משפט הסנדביץ'

1. **משפט הסנדביץ':** אם $c \longleftarrow a_n \le c_n \le b_n \longrightarrow c$, אז $c_n \longrightarrow c$.
לכל $0 < \epsilon$, לבסוף $c - \epsilon \le a_n \le c_n \le b_n \le c + \epsilon$.
2. דוגמא: $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$.
3. דוגמא: $1 \le \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \le 1 + \frac{1}{n^2}$ ולכן $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$.

5 לקריאה עצמית: חזקות ממשיות

5.1 שורשים

1. **אי־שיוויון ברנולי:** יהי $-1 < a \ne 0$. לכל $1 < n$ מתקיים $(1 + a)^n > 1 + na$ (ולכל n מתקיים "$\ge$").
אינדוקציה + פתיחת סוגריים.
2. לכל $0 < a < b$ ולכל n:
(א) יש $0 < c < 1$ כך ש $a < bc^n$.
(ב) יש $1 < c$ כך ש $ac^n < b$.
(א) מאי־שיוויון ברנולי, $b(1 - n\epsilon) < b(1 - \epsilon)^n$. נמצא $0 < \epsilon < 1$ כך ש $a < b(1 - n\epsilon)$.
(ב) מ (א), על ידי העברת אגף.
3. **השורש ה n־י של a:** לכל $0 < a$ ולכל n קיים $0 < b$ יחיד כך ש $b^n = a$. b זה יסומן $\sqrt[n]{a}$, או $a^{\frac{1}{n}}$.
תהי $A := \{x : x^n \le a\}$. הקבוצה לא ריקה ($0 \in A$), וחסומה מלעיל ($x \le x^n \le a$ או $x \le 1$). $b := \sup\{x : x^n \le a\}$.
אילו $a < b^n$ או $b^n < a$, נשתמש בטענה הקודמת (עם c^n בצד של b^n, כך שנקבל $(bc)^n$) ונקבל סתירה.
יחידות: אם $b_1 < b_2$ אז $b_1^n < b_2^n$.
4. $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$.
$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ ומברנולי, $h_n \longrightarrow 0$.

5.2 חזקות רציונליות

1. **חזקה רציונלית:** יהי $0 < a$. עבור m שלם ו n טבעי, $a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{\frac{1}{n}}$.
2. החזקה הרציונלית מקיימת גם היא את התכונות המוכרות של חזקות.
3. * אם $0 \longleftarrow q_n \in \mathbb{Q}$, אז $a^{q_n} \longrightarrow 1$.
יהי $0 < \epsilon$. ניקח k כך ש $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \epsilon$. לבסוף, $-\frac{1}{k} < q_n < \frac{1}{k}$.

5.3 חזקות ממשיות

1. $a \nearrow a_n$ פירושו: a_n סידרה עולה המתכנסת לגבול a.
$a \searrow a_n$ פירושו: a_n סידרה יורדת המתכנסת לגבול a.
2. * לכל מספר ממשי b יש סידרה $b \nearrow q_n \in \mathbb{Q}$.
בהנתן q_n ניקח $q_n < q_{n+1} < b$ כך ש $b - q_{n+1} < \frac{1}{2}(b - q_n)$.
3. * אם $b \longleftarrow q_n, r_n \in \mathbb{Q}$, אז הסדרות $(a^{q_n}), (a^{r_n})$ מתכנסות, ולאותו גבול.
ניקח $b \nearrow c_n \in \mathbb{Q}$. $x := \lim a^{c_n}$ גבול של סידרה מונוטונית חסומה (בנפרד עבור $1 \le a$ ו $a < 1$). מהנ"ל, $\lim a^{q_n} = \lim a^{c_n} = \lim a^{r_n}$.
4. נגדיר $a^b := \lim a^{q_n}$ כאשר $b \longleftarrow q_n \in \mathbb{Q}$.

5.4 תכונות

1. אם $1 \le a$ ו $b \le c$ אז $a^b \le a^c$.
ניקח סדרות רציונליות $c \longleftarrow r_n \ge q_n \longrightarrow b$.
2. אם $b_n \longrightarrow b$ אז $a^{b_n} \longrightarrow a^b$.
ניקח סדרות רציונליות $q_n < b_n < r_n$ כך ש $r_n - q_n \longrightarrow 0$ ונכין סנדביץ' עם a^{b_n}.
3. $a^b a^c = a^{b+c}$.
$a^b a^c \longleftarrow a^{q_n} a^{r_n} = a^{q_n + r_n} \longrightarrow a^{b+c}$.
4. $a^c b^c = (ab)^c$.
5. אם $1 \longleftarrow a_n > 0$ אז $a_n^b \longrightarrow 1$ לכל b.
המקרה $0 \le b$: נקבע $k \ge b$ טבעי. יהי $\epsilon > 0$. לבסוף, $a_n^b < (1+\epsilon)^k \le 1 + 2^k \epsilon$, ועם ברנולי, לבסוף $1 - 2^k \epsilon < (1-\epsilon)^k < a_n^b$.
6. אם $a \longleftarrow a_n > 0$ אז $a_n^b \longrightarrow a^b$ לכל b.
$\left(\frac{a_n}{a}\right)^b \longrightarrow 1$.
7. $(a^b)^c = a^{bc}$.
מראים קודם ל b רציונלי ואחר כך עם סדרה $b \longleftarrow b_n \in \mathbb{Q}$.
8. אם $1 < a$ אז $a^x < a^y$ לכל $x < y$.
$z := x - y > 0$, לכן מספיק להוכיח ש $1 < a^z$ לכל $0 < z$.
עבור z טבעי, זה משום שכפל שומר סדר. את המקרה $z = \frac{1}{n}$ אפשר להמיר למקרה הטבעי, ומשני המקרים האלה מקבלים את המקרה הרציונלי.
המקרה הממשי: ניקח $z \nearrow q_n > 0$. אז $1 < a^{q_1} \le a^{q_2} \le \cdots \le \sup\{a^{q_n}\} = a^z$.
9. אפשר להוכיח גם את שאר כללי החזקה הרגילים.

6 התכנסות במובן הרחב

6.1 שאיפה לאינסוף

1. $a_n \longrightarrow \infty$ אם לכל c ממשי, לבסוף $c \le a_n$.
2. $a_n \longrightarrow -\infty$ אם לכל c ממשי, לבסוף $a_n \le c$.
3. תרגיל: ההגדרות של התכנסות ל $\pm\infty$ לא ישתנו אם נכתוב $<$ במקום $\le$.
4. דוגמאות: $n^2 \longrightarrow \infty$, $-n \longrightarrow -\infty$.
5. סידרה **מתכנסת במובן הרחב** אם היא מתכנסת למספר ממשי, או ל $\pm\infty$.

6.2 חשבון גבולות במובן הרחב

1. $a_n \longrightarrow a^+$: $a < a_n \longrightarrow a$.
2. $a_n \longrightarrow a^-$: $a \longleftarrow a_n < a$.
3. "$\frac{1}{0^+} = \infty$": אם $a_n \longrightarrow 0^+$ אז $\frac{1}{a_n} \longrightarrow \infty$.
4. אם $1 < q$ אז $q^n \longrightarrow \infty$.
נעבור ל $\frac{1}{q}$.
5. "$\frac{1}{\pm\infty} = 0$": אם $|a_n| \longrightarrow \infty$ ו $0 \ne$ אז $\frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$.
$\frac{1}{|a_n|} \longrightarrow 0$.
6. "∞ כפול קבוע חיובי = ∞": אם $a_n \longrightarrow \infty$ ו $b_n \longrightarrow b > 0$, אז $a_n b_n \longrightarrow \infty$.
7. לא נכון עבור סידרה חיובית: $a \longrightarrow \frac{a}{n} \cdot n = a$. ואפשר לסדר גם שלא יהיה גבול: $\frac{2+(-1)^n}{n} \cdot n = 2 + (-1)^n$.
8. בדומה עבור $-\infty$, וכן אם מחליפים "חיובי" ב"שלילי".

6.3 אי־התכנסות במובן הרחב

1. דוגמא: הסידרה $0,1,0,2,0,3,\ldots$ אינה מתכנסת אפילו במובן הרחב.
2. אם $q\leq -1$ אז הסידרה q^n לא מתכנסת אפילו במובן הרחב.
$q^n \not\longrightarrow \pm\infty$, לכן מספיק להוכיח $q^n \not\longrightarrow 0$ וזה כי $1\leq |q^n|$.
3. סיכום:

$$q^n \longrightarrow \begin{cases} \infty & 1<q \\ 1 & q=1 \\ 0 & -1<q<1 \\ \text{undefined} & q\leq -1 \end{cases}.$$

6.4 מונוטוניות ואי־שיויונים

1. כל סידרה עולה ולא חסומה שואפת ל ∞.
2. כל סידרה יורדת ולא חסומה שואפת ל $-\infty$.
3. כל סידרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.
4. **משפט הסנדביץ' לגבול** $\pm\infty$:
   (א) אם $\infty \longleftarrow a_n \leq b_n$ אז $b_n \longrightarrow \infty$.
   (ב) אם $a_n \leq b_n \longrightarrow -\infty$ אז $a_n \longrightarrow -\infty$.
5. סכום של סידרה $a_n \longrightarrow \infty$ וסידרה חסומה שואף ל ∞. בפרט, "$\infty + \text{const} = \infty$".
6. אם $a \longleftarrow a_n \leq b_n \longrightarrow b$ במובן הרחב, אז $a\leq b$.

6.5 סביבות

1. **סביבה של** ∞: קבוצה מהצורה $(c,\infty) := \{x\in\mathbb{R} : c<x\}$.
2. **סביבה של** $-\infty$: קבוצה מהצורה $(-\infty,c) := \{x\in\mathbb{R} : x<c\}$.
3. $a_n \longrightarrow a$ במובן הרחב $\iff$ לכל סביבה של a, לבסוף כל אברי הסידרה נמצאים בסביבה זו.

6.6 חזקות

1. * יהי $1<a$.
   (א) אם $b_n \longrightarrow \infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow \infty$.
   לבסוף $N\leq b_n$.
   (ב) אם $b_n \longrightarrow -\infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow 0$.
2. * יהי $0<a<1$.
   (א) אם $b_n \longrightarrow \infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow 0$.
   (ב) אם $b_n \longrightarrow -\infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow \infty$.

7 תת־סדרות וגבולות חלקיים

7.1 תת־סדרות

1. **תת־סידרה** של סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: סידרה מהצורה $(a_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ כאשר $m_1 < m_2 < \cdots$.
(אם מעדיפים להשתמש באינדקסים $n_1 < n_2 < \cdots$, תת־הסידרה תצויין עם אינדקס רץ אחר, למשל $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.)
2. דוגמאות:
   (א) לסידרה $\frac{1}{n}$ יש תת־סדרות: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ וכן $\frac{1}{105}, \frac{1}{10^9+1}, \ldots$ ואפילו $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ (הסידרה המקורית), אבל לא $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ וגם לא $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$.
   (ב) כל סידרה של אפסים ואחדים היא תת־סידרה של הסידרה $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.
3. בהגדרת תת־סידרה, מתקיים $n \le m_n$.

7.2 גבולות חלקיים

1. אם סידרה מתכנסת במובן הרחב, אז כל תת־סידרה שלה מתכנסת, ולאותו גבול.
2. **גבול חלקי:** גבול של תת־סידרה.
3. מסקנה: אם לסידרה יותר מגבול חלקי אחד, אז היא לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב).
4. דוגמא: הוכחה קלה שהסדרה $0, 1, 0, 1, \ldots$ אינה מתכנסת (אפילו במובן הרחב).
5. התכונות הבאות שקולות לכל $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:
   (א) a הוא גבול חלקי של הסידרה (a_n).
   (ב) לכל סביבה U של a, יש אינסוף ערכי n שעבורם $a_n \in U$.
   ("יש אינסוף איברים מהסדרה בכל סביבה של a.")
6. (תרגיל) בסעיף הקודם:
   (א) לא מספיק להניח שיש איבר מהסידרה בכל סביבה: 1 אינו גבול חלקי של $1, 0, 0, 0, 0, \ldots$.
   (ב) לא הכרחי שיש איבר מהסידרה השונה מ a בכל סביבה: 1 הוא גבול חלקי של $1, 1, 1, \ldots$.
7. קיימת מניה $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. כל מספר ממשי, וכן $\pm\infty$, הם גבולות חלקיים של הסידרה q_n.

7.3 קיום גבול חלקי

1. לכל סידרה יש תת־סידרה מונוטונית.
אם יש אינסוף נקודות פסגה, הן תת־סידרה מונוטונית יורדת.
אם יש רק מספר סופי, אחריהן אף אחת אינה פיסגה ואפשר לבחור תת־סידרה מונוטונית עולה.
2. מסקנה: **משפט בולצנו־ויירשטרס:** לכל סידרה חסומה יש תת־סידרה מתכנסת.
3. מסקנה: לכל סידרה יש תת־סידרה מתכנסת במובן הרחב.
4. * (תרגיל)
   (א) לכל סידרה לא חסומה מלעיל יש תת־סידרה עולה ממש השואפת ל ∞.
   לכל n יש $m_{n-1} < m_n$ המקיים $a_{m_{n-1}} < a_{m_n}$, n.
   (ב) לכל סידרה לא חסומה מלרע יש תת־סידרה יורדת השואפת ל $-\infty$.

7.4 קריטריון קושי

1. **קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרות:** הסידרה (a_n) מתכנסת $\iff$ לכל $0 < \epsilon$ יש N שממנו ואילך המרחק בין כל שני איברים בסדרה קטן מ ϵ (בפירוש: כך ש $|a_n - a_m| \le \epsilon$ לכל $N \le m, n$).
($\Longrightarrow$) הסידרה חסומה: ניקח N שממנו ואילך $|a_n - a_N| \le 1$ ולכן $a_N - 1 \le a_n \le a_N + 1$.
ניקח $a_{m_n} \longrightarrow a$. יהי $0 < \epsilon$. לבסוף, $|a_{m_n} - a| \le \epsilon$. ולבסוף, גם $|a_n - a_{m_n}| \le \epsilon$.
אז $|a_n - a| \le |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| \le 2\epsilon$ לבסוף.

7.5 הגבול העליון והתחתון

1. לכל סידרה יש גבול חלקי מקסימלי.

אם $-\infty$ הוא גבול חלקי, ואין עוד גבולות חלקיים, אז הוא הגבול החלקי המקסימלי. אם ∞ גבול חלקי, אז בודאי שהוא מקסימלי.

נותר המקרה שיש גבול חלקי שאינו $-\infty$, ו ∞ אינו גבול חלקי, ולכן הסידרה חסומה מלעיל.

קבוצת הגבולות החלקיים L חסומה מלעיל: יהי c חסם מלעיל של הסידרה. אם $b_n \leq c \longrightarrow b$ תת־סידרה, אז $b \leq c$.

$s := \sup L$.

לכל n יש גבול חלקי $s - \frac{1}{n} < a < s + \frac{1}{n}$. אם ניקח תת־סידרה $a \longrightarrow b_n$, לבסוף כל איבריה נמצאים בסביבה $(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n})$, ובפרט יש בסביבה זו אינסוף איברים מהסידרה המקורית (a_n).

2. **גבול עליון** של סידרה (a_n): הגבול החלקי (במובן הרחב) הגדול ביותר של הסידרה. מסומן $\overline{\lim} a_n$ (או $\limsup a_n$).

3. **גבול תחתון** של סידרה: הגבול החלקי (במובן הרחב) הגדול ביותר. מסומן $\underline{\lim} a_n$ (או $\liminf a_n$).

4. סידרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\Longleftrightarrow$ $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ (ובמקרה זה, הם שוים ל $\lim a_n$).

$(\Rightarrow)$ $a := \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$. נראה ש $a_n \longrightarrow a$.

אם a ממשי: תהי $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ סביבה של a. נניח $a_n \leq a - \epsilon$ לאינסוף ערכי n. תהי (b_n) התת־סידרה המורכבת מערכים אלה. ניקח תת־סידרה מתכנסת (c_n) של (b_n). $c \longrightarrow c_n \leq a - \epsilon$ ולכן $c \leq a - \epsilon$. מצאנו תת־סידרה של (a_n) שגבולה קטן מ $a = \underline{\lim} a_n$, סתירה.

בדומה, $a_n \geq a + \epsilon$ לכל היותר למספר סופי של ערכי n. לכן, יש מקום בסדרה שממנו ואילך $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

אם $a = \infty$: כאן יש לבדוק סביבות מהצורה (c, ∞), ונראה ש $a_n \leq c$ רק למספר סופי של n. בדומה עבור $a = -\infty$.

5. מסקנה: התכונות הבאות שקולות:

(א) הסידרה (a_n) מתכנסת.

(ב) הגבול העליון והתחתון של הסידרה (a_n) ממשיים ושווים.

(ג) כל הגבולות החלקיים של הסידרה ממשיים ושווים.

6. * תרגיל:

(א) $\overline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$.

(ב) $\underline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$.

8 המספר e

8.1 הגדרת המספר כגבול של סידרה

1. * **אי־שיוון ברנולי:** יהי $-1 < a \neq 0$. לכל $n > 1$ מתקיים $(1 + a)^n > 1 + na$ (ולכל n מתקיים "$\geq$").

אינדוקציה + פתיחת סוגריים.

2. דוגמא: $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ בעזרת אי־שיוון ברנולי.

$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ ומברנולי, $h_n \longrightarrow 0$.

3. הגבול $e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ קיים. בנוסף, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ לכל n.

נסמן $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. אז $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

מברנולי, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1$.

עבור b_n משתמשים בזה, ובכיוון ההפוך של ברנולי.

4. מהצבת n מספיק גדול ($n = 10,000$ למשל), נקבל $2.7181 < e < 2.7184$. הגבול הוא $e = 2.71828\dots$.

5. תכונות ידועות: e מספר אי־רציונלי (נוכיח בהמשך הקורס), ואף אינו שורש של פולינום עם מקדמים רציונלים (לא נוכיח).

8.2 גבולות דומים

1. $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \longrightarrow e$.
2. אם $a_n \longrightarrow a$ אז לכל $m_n \longrightarrow \infty$ מתקיים גם $a_{m_n} \longrightarrow a$.
3. $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a$.

$0<a$: $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}$.

כיון ש $\left[\frac{n}{a}\right] \le \frac{n}{a} < \left[\frac{n}{a}\right]+1$, $\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{a}\right]+1}\right)^{\left[\frac{n}{a}\right]} \le \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)}\right)^{\frac{n}{a}} \le \left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{a}\right]}\right)^{\left[\frac{n}{a}\right]+1}$.

$a=-b<0$: $1-\frac{b^2}{n} \le \left(1-\frac{b^2}{n^2}\right)^n \le 1$ (מברנולי). $\left(1-\frac{b}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right) = 1-\frac{b^2}{n^2}$.

9 טורים

9.1 סכומים אינסופיים

1. סכומים אינסופיים לא בהכרח מתנהגים כמו סכומים סופיים. למשל אין אסוציאטיביות בסכום $-1+1-1+\cdots$:

$$\begin{aligned}(-1+1)+(-1+1)+\cdots &= 0\\ -1+(1-1)+(1-1)+\cdots &= -1\end{aligned}$$

2. עבור סידרה (a_n), יהי $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1+\cdots+a_k$. אם $s_k \longrightarrow s$, נסמן $s =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (או בקיצור $s =: \sum a_n$).

הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא **טור**, ונאמר שהטור **מתכנס** או **מתבדר** אם הסידרה (s_n) מתכנסת או מתבדרת, בהתאמה.

3. הסכומים $s_k = a_1+\cdots+a_k$ נקראים **הסכומים החלקיים** של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
4. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ מתבדר, כי לסידרה (s_k) יש שני גבולות חלקיים שונים.

9.2 דוגמאות

1. **טור הנדסי:** $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ מתכנס $\iff |q|<1$. במקרה זה, סכומו $\frac{1}{1-q}$.

$qs_k = q^2+\cdots+q^k = -1+s_k+q^k$.

2. פתרון הפרדוקס של זנו: סכום של אינסוף זמנים חיוביים יכול להיות סופי, למשל $\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$.
3. **טור טלסקופי:** $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

4. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \longrightarrow 0$.

$a_n = s_n - s_{n-1} \longrightarrow s-s=0$.

5. **הטור ההרמוני:** $\sum \frac{1}{n} = \infty$. בפרט, התנאי $a_n \longrightarrow 0$ אינו מספיק להתכנסות.

הסידרה s_n אינה סידרת קושי: $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \ge n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (תרגיל: למעשה, $s_{2^k} \ge k\cdot\frac{1}{2}$ לכל k).

9.3 צירוף לינארי של טורים

1. * אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. * עבור $c \neq 0$, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
   אם $0 < c$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \pm\infty$.
3. **מבחן ההפרש:** אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ מתכנס, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

9.4 ההתכנסות תלויה רק בזנב

1. **זנב/שארית** של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: טור מהצורה $r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.
2. (מסקנה) **התכנסות טור תלויה בזנב:** התכונות הבאות שקולות:
   (א) הטור מתכנס.
   (ב) כל זנב של הטור מתכנס.
   (ג) יש לטור זנב שמתכנס.

   במצב כזה, מתקיים $s = s_k + r_k$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$) לכל k.
   לבסוף, $(a_1 + \cdots + a_n) = (a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n)$.
3. מסקנות:
   (א) שינוי, הוספה או מחיקה של מספר סופי של איברים בטור אינם משפיעים על התכנסותו או התבדרותו.
   (ב) טור מתכנס $\Longleftrightarrow$ הזנבות שלו מתכנסים ושואפים לאפס, $r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

10 טורים חיוביים והשוואתם

10.1 התכנסות במובן הרחב

1. **טור חיובי:** טור $\sum a_n$ עם $0 \leq a_n$ לכל n.
2. סידרת הסכומים החלקיים s_n של טור חיובי היא סידרה עולה ולכן כל טור חיובי $\sum a_n$ מתכנס במובן הרחב, למספר ממשי (במקרה זה, נכתוב $\sum a_n < \infty$) או לאינסוף ($\sum a_n = \infty$).
   טור חיובי $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\sum a_n < \infty$.

10.2 מבחן ההשוואה

1. **מבחן ההשוואה:** אם $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n אז $\sum a_n \leq \sum b_n$. בפרט:
   (א) אם $\sum b_n < \infty$ אז גם $\sum a_n < \infty$.
   (ב) אם $\sum a_n = \infty$ אז גם $\sum b_n = \infty$.

   המסקנות (א)+(ב) הנ"ל נכונות גם אם $0 \leq a_n \leq b_n$ לבסוף (אבל כאן לא בהכרח $\sum a_n \leq \sum b_n$).
2. דוגמא: $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.
   נחסום (את זנבו) על ידי סכום טלסקופי: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}$.
3. * מסקנה: עבור טורים חיוביים עם $0 < b_n$:
   (א) אם $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$ ו $\sum b_n < \infty$ אז גם $\sum a_n < \infty$.
   (ב) אם $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \infty$ ו $\sum b_n = \infty$ אז גם $\sum a_n = \infty$.
4. עבור טורים חיוביים, אם יש קבועים $0 < \alpha, \beta$ שעבורם $\alpha b_n \leq a_n \leq \beta b_n$ (לבסוף), אז הטורים $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
   למעשה זה יחס שקילות של טורים.

10.3 מבחן ההשוואה הגבולי

1. **מבחן ההשוואה הגבולי:** עבור טורים חיוביים שעבורם הגבול $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow c$ קיים ו $0 < c < \infty$, הטורים מתכנסים ומתבדרים ביחד.
2. דוגמאות: $\sum \frac{n}{n^2+1}$ מתבדר יחד עם $\sum \frac{1}{n}$. $\sum \frac{n}{n^3+1}$ מתכנס יחד עם $\sum \frac{1}{n^2}$.

11 מבחן השורש ומבחן המנה להתכנסות טור חיובי

11.1 מבחן השורש

1. $\overline{\lim} x_n < 1 \iff$ יש $q < 1$ כך שלבסוף $x_n < q$.
   ($\Leftarrow$) אחרת, לכל n יש $1 - \frac{1}{n} \leq x_{m_n}$ ($m_{n-1} < m_n$), ולה תת־סידרה מתכנסת במובן הרחב (לגבול $1 \leq$).
2. אם $\overline{\lim} x_n > 1$, אז $x_n > 1$ עבור אינסוף ערכי n.
   הכיוון ההפוך אינו נכון.
3. **מבחן השורש:** עבור טור חיובי:
   (א) אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, אז $\sum a_n < \infty$.
   לבסוף, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, ואז $a_n \leq q^n$.
   (ב) אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, אז $a_n \nrightarrow 0$, ובפרט $\sum a_n = \infty$.
   $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ (ולכן $a_n \geq 1$) אינסוף פעמים.
4. דוגמא: ממבחן השורש, $\sum q^{n+(-1)^n} < \infty$ ($0 < q < 1$).
   (מתכנס גם מהשוואה להנדסי $\sum q^{n-1}$.)
5. * $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ נכון.
   $1 + h_n := \sqrt[n]{n}$. מנוסחת הבינום $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (או מספירת מספר הפעמים ש h_n^2 מתקבל בפתיחת הסוגריים),
   $n = (1+h_n)^n \geq \binom{n}{2} h_n^2$, ומחלצים את h_n.
6. לא ניתן להגיד דבר אם הגבול הוא 1: $\sum \frac{1}{n} = \infty, \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

11.2 מבחן המנה

1. **מבחן המנה:** לטור חיובי:
   (א) אם $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, אז $\sum a_n < \infty$.
   לבסוף, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. אפשר להניח שזה לכל n, ואז $a_n \leq q^{n-1} a_1$.
   (ב) אם לבסוף $0 < a_n$ ו $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (בפרט, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow c > 1$), אז $\sum a_n = \infty$.
   הסידרה עולה החל ממקום מסויים, ולכן $a_n \nrightarrow 0$.
2. דוגמא: $\sum \frac{a^n}{n!}$ מתכנס ממבחן המנה. בפרט, $\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$.
3. אם $a_n \leq b_n$ לבסוף, אז $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.
4. אם מתקיים התנאי של מבחן המנה, אז מתקיים התנאי של מבחן השורש.
   $a_n \leq q a_{n-1} \leq \cdots \leq q^{n-N} a_N$, לכן $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim \sqrt[n]{q^{n-N} a_N} = q < 1$.
5. דוגמא שמבחן השורש עובד והמנה לא: $\sum q^{n+(-1)^n}$ ($0 < q < 1$) הנ"ל.
   כאן $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ובכל זאת הטור מתכנס!

12 מבחן העיבוי להתכנסות טור מונוטוני

12.1 חוק הקיבוץ

1. **חוק הקיבוץ:**

(א) **לטור כללי:** הכנסת סוגריים לטור מתכנס במובן הרחב אינה משנה את סכומו:
לכל סידרה $1 = m_1 < m_2 < \cdots$ מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}(a_{m_i} + \cdots + a_{m_{i+1}-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
$s'_k = s_{m_{k+1}-1} \longrightarrow s$.

(ב) **לטור חיובי:** מחיקת (והכנסת) סוגריים בטור חיובי אינה משנה את סכומו.
גבול הסכומים החלקיים קיים במובן הרחב, ולכן שווה לגבול של תת־הסידרה המתקבלת מהכנסת הסוגריים.

2. החוק אינו תקף לטורים שאינם מתכנסים במובן הרחב: הכנסת סוגריים עשויה לגרום להם להתכנס (למשל עבור $\sum(-1)^n$).

12.2 מבחן העיבוי

1. **מבחן העיבוי:** אם הסידרה a_n חיובית ויורדת, אז הטורים $\sum a_n$ ו $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
בכל סוגריים, נשכפל את האיבר הראשון, או את האיבר (שאחרי) האחרון.
$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + (2a_2 + 4a_4 + \cdots)$.

2. $1 < \alpha \iff \sum \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$.
ראינו שבניגוד למבחן העיבוי, מבחן השורש (ולכן גם מבחן המנה) אינו מועיל לטורים $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$.

3. דוגמא: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$.

4. דוגמא: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\epsilon} n} < \infty$.

5. תרגיל: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} = \infty$, אך $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log^{1+\epsilon} n} < \infty$.

6. לא כל סידרה עולה יכולה להחליף את 2^n במבחן העיבוי: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$, $0 \searrow \frac{1}{n \log n}$, ועדיין $\sum 2^{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2^n} \log 2^{2^n}} = \frac{1}{\log 2} \sum \frac{1}{2^n} < \infty$.

7. (ללא הוכחה) תהי m_n סידרה כך שיש קבוע $1 < c_1$ עבורו $c_1 \leq \frac{m_{n+1}}{m_n}$ לכל n.
הסידרה m_n יכולה להחליף את 2^n במבחן העיבוי $\iff$ סידרת המנות $\frac{m_{n+1}}{m_n}$ חסומה מלעיל.
באופן מפתיע, זה הוכח רק ב 2010 (על ידי ליפליאנד, טיכונוב, וזלצר).

13 טורים כלליים

13.1 משפט לייבניץ על התכנסות טור מתחלף

1. אם $a_{2n} \longrightarrow a$ וגם $a_{2n+1} \longrightarrow a$, אז $a_n \longrightarrow a$.
וכן לכל שתי סדרות שאיחודן $\mathbb{N}$.

2. **משפט לייבניץ:** אם a_n יורדת לאפס, אז:

(א) הטור $\sum(-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

(ב) שאריות הטור מקיימות $|r_k| \leq a_{k+1}$.
כלומר, $s_k - a_{k+1} \leq s \leq s_k + a_{k+1}$.

(א) $s_{2k} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq 0$ סידרה עולה.
$s \longleftarrow s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1$.
$s_{2k-1} = s_{2k} + a_{2k} \longrightarrow s + 0 = s$.

(ב) ב(א) ראינו ש $0 \leq s \leq a_1$ לכל טור כנ"ל. בפרט, עבור זנב הטור, $0 \leq r_{2k} \leq a_{2k+1}$, ובאי־זוגי אפשר להוציא מינוס.

3. דוגמא: $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס. אם רוצים את הסכום בדיוק של אלפית, מספיק ש $\frac{1}{1000} \le a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, כלומר $k = 999$.
באינפי 2 נוכיח: $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2) = 0.6931\ldots$.
4. לא מספיק שהסידרה שואפת לאפס: $a_n := (-1)^n\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ והטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתבדר.
5. גם אם הסידרה (a_n) חיובית, הכרחי שהסדרה יורדת (ולא מספיק ששואפת לאפס):
אילו $\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\cdots$ התכנס, אז גם $\sum(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$ מתכנס (הכנסת סוגריים), ואז גם $\sum\frac{1}{n}$.

13.2 התכנסות טור בהחלט ובתנאי

1. **קריטריון קושי להתכנסות טורים:** הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ לכל $\epsilon > 0$ יש N כך ש $|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n| \le \epsilon$ לכל $N \le m < n$.
2. טור $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum|a_n| < \infty$.
3. כל טור שמתכנס בהחלט, מתכנס.
מקריטריון קושי ואי"ש המשולש.
4. טור **מתכנס בתנאי:** מתכנס אך לא מתכנס בהחלט.
5. דוגמא: $\sum\frac{a^n}{n}$.
ממבחן השורש, הטור מתכנס בהחלט אם $|a| < 1$ ומתבדר אם $|a| > 1$ (שאז $a_n \nrightarrow 0$).
עבור $|a| = 1$: הטור $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר והטור $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס מלייבניץ, ולכן מתכנס בתנאי.

13.3 סידרה מונוטונית לאפס וטור חסום

1. טור הוא **חסום** אם סידרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.
2. כל טור מתכנס הוא חסום.
3. הטור $\sum(-1)^{n+1}$ חסום למרות שאינו מתכנס.
כל טור חיובי חסום הוא מתכנס.
4. **מבחן דיריכלה:** אם $a_n \longrightarrow 0$ מונוטונית והטור $\sum b_n$ חסום, אז $\sum b_na_n$ מתכנס.
מספיק להוכיח עבור $a_n \searrow 0$. עבור קריטריון קושי

$$\begin{aligned}
|b_{m+1}a_{m+1}+\cdots+b_na_n| &= |(s_{m+1}-s_m)a_{m+1}+\cdots+(s_n-s_{n-1})a_n| = \\
&= |s_m(-a_{m+1})+s_{m+1}(a_{m+1}-a_{m+2})+\cdots+s_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+s_na_n| \\
&\le |s_m|\cdot|a_{m+1}|+|s_{m+1}|\cdot|a_{m+1}-a_{m+2}|+\cdots+|s_{n-1}|\cdot|a_{n-1}-a_n|+|s_n|\cdot|a_n| \\
&\le c\Big(|\underbrace{a_{m+1}}_{\ge 0}|+|\underbrace{a_{m+1}-a_{m+2}}_{\ge 0}|+\cdots+|\underbrace{a_{n-1}-a_n}_{\ge 0}|+|\underbrace{a_n}_{\ge 0}|\Big) = c\cdot 2a_{m+1}.
\end{aligned}$$

5. משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של מבחן דיריכלה: הטור $\sum(-1)^{n+1}$ חסום.
6. דוגמא: $\sum\frac{\sin n}{n}$ מתכנס: $\sum\sin n$ חסום.
באופן חד פעמי לקורס, יותר יפה להוכיח בעזרת מספרים מרוכבים:
$q := \cos 1 + i\sin 1$. $q^n = \cos n + i\sin n$, ולכן $\frac{2}{|q-1|} = \frac{|q|^{n+1}+|q|}{|q-1|} \ge \left|\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right| = \left|\sum_{k=1}^n q^k\right| \ge |\sum_{k=1}^n \sin k|$.

13.4 סידרה מונוטונית חסומה וטור מתכנס

1. ⋆ **מבחן אבל:** אם (a_n) מונוטונית וחסומה ו $\sum b_n$ מתכנס, אז $\sum b_na_n$ מתכנס.
$a_n - a \longrightarrow 0$ מונוטונית.

14 משפט רימן

14.1 החלק החיובי והשלילי של טור

1. עבור טור $\sum a_n$, נסמן $p_n := \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$, $q_n := \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$.
2. $0 \leq p_n, q_n \leq |a_n|$. $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$.
3. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם ורק אם הטורים $\sum p_n, \sum q_n$ מתכנסים.
במקרה זה, מתקיים $\sum a_n = \sum p_n - q_n = \sum p_n - \sum q_n$.
4. אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$.
$\sum |a_n| \pm a_n$ מתבדר.
5. כאן אין משפט הפוך: $\sum (-1)^n$ אינו מתכנס אפילו במובן הרחב, למרות ש $\sum p_n = \sum q_n = \infty$.

14.2 חוק החילוף

1. שינוי סדר האיברים בטור חיובי אינו משנה את סכומו: עבור טור חיובי, מתקיים $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$ לכל תמורה σ על $\mathbb{N}$.
$s_k^\sigma \leq s_{\max\{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}} \leq s$, ולכן $s^\sigma \leq s$. $s = (s^\sigma)^{\sigma^{-1}} \leq s^\sigma$.
2. **חוק החילוף:** שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בהחלט אינו משנה את סכומו.
$\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)}$.

14.3 שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בתנאי

1. תזכורת: אם $a_n \longrightarrow a$ אז לכל סידרה (לאו דווקא עולה) $m_n \longrightarrow \infty$ מתקיים $a_{m_n} \longrightarrow a$.
2. אם בכל סוגריים המחוברים מאותו סימן, הסרת הסוגריים מטור מתכנס אינה משנה את סכום הטור:
$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{i=1}^\infty \underbrace{(a_{m_i} + \cdots + a_{m_{i+1}-1})}_{b_i}$.
לכל k יהי $i = i(k)$ כך ש $m_i \leq k < m_{i+1}$. אז $|s'_i - s_k| = |a_{k+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m_{i+1}-1}| \leq |b_i| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
בעוד ש $s'_k \longrightarrow s$.
3. *** משפט רימן:** אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז על ידי שינוי סדר אבריו אפשר לקבל כל סכום $-\infty \leq s \leq \infty$, וכן טור שאינו מתכנס אפילו במובן הרחב.
$\sum p_n = \sum q_n = \infty$ ולכן זה נכון גם לכל זנב שלהם.
המקרה $-\infty < s < \infty$:
m_1 הראשון כך ש $t_1 := p_1 + \cdots + p_{m_1} > s$ ($t_1 - p_{m_1} \leq s$). $t_1 - s \leq p_{m_1}$.
i_1 הראשון כך ש $t_2 := t_1 - (q_1 + \cdots + q_{i_1}) < s$. $s - t_2 \leq q_{i_1}$.
m_2 הראשון כך ש $t_3 := t_2 + (p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2}) > s$. $t_3 - s \leq p_{m_2}$.
i_2 הראשון כך ש $t_4 := t_3 - (q_{i_1+1} + \cdots + q_{i_2}) < s$. $s - t_4 \leq q_{i_2}$.
וכולי.
$a_n \longrightarrow 0$, לכן
$$(p_1 + \cdots + p_{m_1}) - (q_1 + \cdots + q_{i_1}) + (p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2}) - \cdots = \lim t_k = s.$$
כל איבר $a_n = 0$ נלקח בשני סוגרים שונים. נמחקו מאחד מהם. זה לא ישנה את הסכום, וכך כל a_n נלקח בדיוק פעם אחת בסכום. נמחק גם את האיברים p_n שהם אפס משום ש $a_n < 0$ ואת האיברים q_n שהם אפס משום ש $a_n > 0$.
המקובצים מאותו סימן, לכן אפשר להסיר הסוגריים.
המקרה $s = \infty$: בצעד n נעקוף את n ואז נוריד את q_n. $s = -\infty$ דומה. התבדרות: בצעד n נעלה מעל 1 ובצעד $2n+1$ נרד מתחת ל -1.
4. מסקנה: אם כל התמורות נותנות אותו סכום ממשי, אז הטור מתכנס בהחלט.

15 מכפלת טורים - לקריאה עצמית

15.1 סכימה ב"צורות ר"

1. אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אז $\sum_n \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j = \left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)$.
$s_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j = (a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n) \longrightarrow \left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)$.
2. מסקנה: אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט, אז $\sum_n \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j$ מתכנס בהחלט.
בפרט, סדר סכימת המכפלות לא משנה את הסכום. למשל, $\sum_{n=2}^\infty \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = \left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)$ (סכימה לפי אלכסונים).
3. דוגמא: $\sum_{n=1}^\infty nq^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^\infty q^n\right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}$.

15.2 סכימה באלכסונים

1. אם $a_n \longrightarrow a$ אז $\sup\{a_{m_n}, a_{m_n+1}, \dots\} \longrightarrow a$ לכל סידרה $m_n \longrightarrow \infty$.
2. *** משפט מרטנס:** אם אם $a := \sum a_n$ מתכנס בהחלט ו $b := \sum b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=2}^\infty \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = ab$.
s_n, r_n הסכומים החלקיים והשאריות של הטור $\sum b_n$, c חסם לסידרה $|r_n|$.

$$a_1 b + a_2 b + \cdots + a_{n-1} b \quad \longrightarrow \quad ab$$

נחסר את הסכום החלקי $\sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_{n-1} s_1$:

$$\left|\underbrace{a_1 r_{n-1} + \cdots + a_{[n/2]} r_{n-[n/2]}} + \underbrace{a_{[n/2]+1} r_{n-[n/2]-1} + \cdots + a_{n-1} r_1}\right|$$
$$\le \left(\sum |a_n|\right)\cdot \sup\left\{\left|r_{n-[n/2]}\right|, \left|r_{n-[n/2]+1}\right|, \dots\right\} + \left(\left|a_{[n/2]+1}\right| + \left|a_{[n/2]+2}\right| + \cdots\right) c \longrightarrow 0.$$

3. לא מספיק שהטורים מתכנסים בשביל סכימה באלכסונים: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, אך $\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i}\right| \ge 1$ לכל n.

16 גבול של פונקציה (בלשון הסדרות)

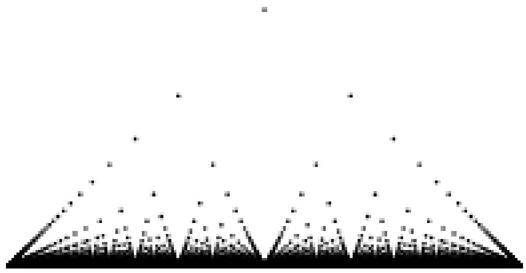
אנו נגדיר הכל בלשון הסדרות, ונראה שקילות לאפיון בעזרת ϵ-δ.

16.1 הגדרת גבול של פונקציה

1. a **נקודת הצטברות** של קבוצה X: יש סידרה $X \setminus \{a\} \ni x_n \longrightarrow a$.
2. **פונקציה ממשית:** פונקציה $f\colon X \to \mathbb{R}$ לאיזשהי קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$.
3. **תחום ההגדרה** של פונקציה: קבוצת הנקודות עליהן הפונקציה מוגדרת.
4. יהיו $-\infty \le a, b \le \infty$. $\lim_{x\to a} f(x) = b$, או $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, פירושו:
   (א) (תנאי ספף) a נקודת הצטברות של תחום ההגדרה של הפונקציה.
   (ב) (הדרישה העיקרית) לכל סידרה $a \neq x_n \longrightarrow a$ בתחום ההגדרה, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.
5. אם גבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז הוא יחיד.
6. דוגמאות:
   (א) $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$. גם הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 3 \\ 1{,}000 & x = 3 \end{cases}$ תקיים $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$!

(ב) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

(ג) פונקציית הפופקורן $f(x):=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{n} & x=\frac{m}{n}\ \text{(reduced)}\end{cases}$ הגבול בכל נקודה הוא אפס.



בסביבה חסומה יש רק מספר סופי של שברים לא מדומים עם מכנה חסום. כשנעבור אותם, המכנה יגדל.

16.2 אי־קיום גבול לפונקציה

1. הסיבות האפשריות לאי קיום גבול $\lim_{x\to a} f(x)$ בנקודת הצטברות a של תחום הפונקציה:

(א) יש בתחום ההגדרה סידרה $a\neq x_n\to a$ כך שגבול הסידרה $\lim f(x_n)$ אינו קיים.

(ב) יש בתחום ההגדרה סדרות $a\neq x_n,\tilde{x}_n\to a$ כך שהגבולות $\lim f(x_n),\lim f(\tilde{x}_n)$ קיימים ושונים.

(ג) תרגיל: (ב) גורר את (א), ולכן (א) שקול לאי־קיום הגבול.

אם $a\neq x_n,\tilde{x}_n\longrightarrow a$ בתחום ו $\lim f(x_n)\neq\lim f(\tilde{x}_n)$, נתבונן בסידרה $x_1,\tilde{x}_1,x_2,\tilde{x}_2,\ldots$.

2. דוגמאות:

(א) הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים. ניקח $x_n,\tilde{x}_n$ כך ש $\frac{1}{x_n}=2\pi n,\frac{1}{\tilde{x}_n}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

(ב) (תרגיל) לפונקציית הערך השלם $[x]:=\max\{k\in\mathbb{Z}:k\leq x\}$ יש גבול אך ורק בנקודות שאינן שלמות.

(ג) לפונקציית דיריכלה $f(x):=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ אין גבול באף נקודה.

16.3 תכונות מיידיות

1. * משפטים מיידיים מהמשפטים המקבילים על גבולות של סדרות:

(א) $\lim_{x\to a} c=c$.

(ב) אם $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ו $\lim_{x\to a} g(x)=c$ אז:

i. $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c$.

ii. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c$.

iii. אם $c\neq 0$, אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$.

השוויונות נכונים גם כאשר הגבולות אינם ממשיים, כל עוד אגף ימין מוגדר.

(ג) סנדביץ': אם $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ו $g(x),h(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, אז $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$.

ובדומה משפט הסנדביץ' ב $\pm\infty$.

2. * אם $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, $b\neq f(x)$, $\operatorname{im}(f)\subseteq\operatorname{dom}(g)$ ובנוסף $g(x)\xrightarrow[x\to b]{} c$, אז $g(f(x))\xrightarrow[x\to a]{} c$.

ללא הדרישה $b\neq f(x)$, הטענה אינה נכונה.

17 גבול של פונקציה, בלשון ϵ-δ

חלק גדול מהסעיפים בפרק זה אפשר להשאיר כתרגיל.

17.1 סביבה מנוקבת

1. **סביבה מנוקבת** של מספר ממשי a: קבוצה מהצורה $\{x : 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.
2. a נקודת הצטברות של קבוצה $X \iff$ בכל סביבה מנוקבת של a יש נקודה מ X.

17.2 גבול של פונקציה בלשון ϵ-δ

1. מוסכמה א: בכל מקום שיופיע ביטוי מהצורה $\lim_{x\to a} f(x) = b$, מניחים בלי לומר זאת במפורש ש a נקודת הצטברות של $\mathrm{dom}(f)$.
2. מוסכמה ב: בכל מקום שנטענת טענה לגבי הערך $f(x)$, הטענה היא רק לגבי נקודות x בהן הפונקציה f מוגדרת.
3. יהיו a, b ממשיים. $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$ לכל $0 < \epsilon$ יש סביבה מנוקבת של a שבה $|f(x) - b| < \epsilon$.

   בפירוט: לכל $0 < \epsilon$ יש $0 < \delta$ כך שמתקיים $|f(x) - b| < \epsilon$ לכל x (בתחום ההגדרה) המקיים $0 < |x-a| < \delta$.

   ($\Leftarrow$) אם $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$ אז יש $0 < \epsilon$ ולכל n יש $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ בתחום כך ש $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$.
4. דוגמא: חישוב $\lim_{x\to 3}(2x+1)$ בעזרת ϵ-δ.

17.3 גבול במובן הרחב

1. **סביבה מנוקבת של** ∞ = **סביבה של** ∞ = קבוצה מהצורה (c, ∞).

   סביבה מנוקבת של $-\infty$ = **סביבה של** $-\infty$ = קבוצה מהצורה $(-\infty, c)$.
2. $a = \pm\infty$ היא **נקודת הצטברות** של תחום הפונקציה $f \iff$ בכל סביבה מנוקבת של a יש נקודה בתחום הפונקציה.

   עבור $a = \infty$, שקול שהקבוצה $\mathrm{dom}(f)$ אינה חסומה מלעיל.

   עבור $a = -\infty$, שקול שהקבוצה $\mathrm{dom}(f)$ אינה חסומה מלרע.
3. יהיו $-\infty \leq a, b \leq \infty$. $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$ לכל סביבה V של b יש סביבה מנוקבת U של a כך ש $f(x) \in V$ לכל $x \in U$.

   לפי המוסכמות שלנו, דורשים במובלע ש a נקודת הצטברות של $\mathrm{dom}(f)$ ובודקים רק נקודות $x \in U$ שנמצאות בתחום הפונקציה f.
4. * בפירוט (בכתה נדגים רק חלק), עבור a, b ממשיים:

   (א) $\lim_{x\to a} f(x) = b$: לכל $0 < \epsilon$ יש $0 < \delta$ כך ש $|f(x) - b| < \epsilon$ לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$.

   (ב) $\lim_{x\to \infty} f(x) = b$: לכל $0 < \epsilon$ יש d ממשי כך ש $|f(x) - b| < \epsilon$ לכל $d < x$.

   (ג) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$: לכל $0 < \epsilon$ יש d ממשי כך ש $|f(x) - b| < \epsilon$ לכל $x < d$.

   (ד) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$: לכל c ממשי יש $0 < \delta$ כך ש $c < f(x)$ לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$.

   (ה) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$: לכל c ממשי יש $0 < \delta$ כך ש $f(x) < c$ לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$.

   (ו) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$: לכל c ממשי יש d ממשי כך ש $c < f(x)$ לכל $d < x$.

   (ז) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$: לכל c ממשי יש d ממשי כך ש $c < f(x)$ לכל $x < d$.

   (ח) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$: לכל c ממשי יש d ממשי כך ש $f(x) < c$ לכל $d < x$.

   (ט) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$: לכל c ממשי יש d ממשי כך ש $f(x) < c$ לכל $x < d$.

בכל האי־שיוויונים שאינם מערבים את המספר 0, אפשר להחליף את היחס $<$ ביחס $\leq$ וההגדרה לא תשתנה.

18 גבולות מימין ומשמאל

18.1 נקודות הצטברות מימין ומשמאל

1. נקודה ממשית a היא נקודת הצטברות **מימין** של תחום הפונקציה אם מתקיימת אחת התכונות השקולות הבאות:

   (א) יש סידרה $a < x_n \to a$ בתחום הפונקציה.

   (ב) לכל $0 < \delta$ יש נקודה $a < x < a + \delta$ בתחום ההגדרה.

   נקודה ממשית a היא נקודת הצטברות **משמאל** של תחום הפונקציה אם מתקיימת אחת התכונות השקולות הבאות:

   (א) יש סידרה $a > x_n \to a$ בתחום הפונקציה.

   (ב) לכל $0 < \delta$ יש נקודה $a - \delta < x < a$ בתחום.

18.2 גבולות מימין ומשמאל

1. עבור a ממשי שהוא נקודת הצטברות מימין/משמאל (בהתאמה) של תחום הפונקציה:

   (א) $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$: $f(x_n) \longrightarrow b$ לכל סידרה $a < x_n \to a$ בתחום ההגדרה.

   (ב) $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$: $f(x_n) \longrightarrow b$ לכל סידרה $a > x_n \to a$ בתחום ההגדרה.

2. דוגמא: פונקציית הסימן $f(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 < 0 = f(0) < 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

3. ניתן לאפיין גבולות מימין ומשמאל בלשון ϵ-δ, בעזרת סביבות ימניות $(a, a+\delta)$ וסביבות שמאליות $(a-\delta, a)$ במקום סביבות מנוקבות.

18.3 יישום לחישוב גבולות

1. עבור a נקודת הצטברות מימין וגם משמאל של תחום הפונקציה f:

   $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b$.

   בפרט, הגבול קיים $\iff$ הגבול מימין ומשמאל קיימים ושוים.

   $(\Rightarrow)$ אם הסידרה אינה חד־צדדית לבסוף, אפשר לפצלה לשתי סדרות חד־צדדיות.

2. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

   גבול מימין: השוואת שטח המשולש הכלוא בפלח מעגל היחידה לשטח הפלח. גבול משמאל: $\sin x = -\sin(-x)$.

3. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

   $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

   גבול מימין: השוואת שטח המשולש החוסם את הפלח, הפלח, והמשולש החסום בפלח, והסקה ש $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

19 רציפות פונקציות

19.1 הגדרה ותכונות שקולות

1. f **רציפה בנקודה** a: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   כמוסכם, דורשים ש a נקודת הצטברות של תחום ההגדרה ו $f(a)$ מוגדרת.

2. דוגמאות: פונקציה קבועה היא רציפה בכל נקודה. הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה.

3. ניסוחים שקולים לרציפות f בנקודה a:

(א) לכל סידרה $a \longrightarrow x_n$ בתחום מתקיים $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.
(אין צורך לדרוש $x_n \neq a$.)

(ב) לכל $0 < \epsilon$ יש $0 < \delta$ כך ש $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ לכל x כך ש $|x - a| \leq \delta$.
(אין צורך לדרוש $x \neq a$.)

(ג) $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

19.2 פעולות המשמרות רציפות

1. * אם f, g רציפות ב a אז גם $f \pm g, f \cdot g$ (חיבור וכפל נקודתי) רציפות ב a, ואם $g(a) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה ב a.

2. דוגמא: הפונקציה $\sin$ רציפה בכל נקודה a.

$\sin(a+h) = \sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h \xrightarrow[h\to 0]{} \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0$.

3. מסקנות: כל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל נקודה. כל מנה של פולינומים היא רציפה בנקודות בהן המכנה אינו 0.

4. * אם f רציפה בנקודה a, $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, ו g רציפה בנקודה $b := f(a)$, אז $g \circ f$ רציפה בנקודה a.

5. דוגמא: הפונקציה $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ רציפה בכל נקודה, כהרכבת שתי פונקציות רציפות.
לכן גם $\tan x$ רציפה כאשר $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, כמנת פונקציות רציפות.

19.3 סוגי אי־רציפות

1. סוגי האי־רציפות האפשריים בנקודה a:
   - **סליקה:** הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אך שונה מ $f(a)$, או ש $f(a)$ אינה מוגדרת.
   - **קפיצה:** הגבולות החד־צדדיים ב a קיימים אך שונים ("אי רציפות מ**סוג ראשון**").
   - **עיקרית:** לפחות אחד הגבולות החד־צדדיים אינו קיים ("אי רציפות מ**סוג שני**").

2. דוגמאות לאי־רציפות בנקודה 0: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (סליקה), $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (סליקה), $f(x) = [x]$ (קפיצה), $f(x) = \frac{1}{x}$ וכן $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (עיקרית).

20 פונקציות רציפות בקטע סגור

20.1 רציפות מימין ומשמאל

1. f **רציפה מימין בנקודה** a אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

2. f **רציפה משמאל בנקודה** a אם $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

3. דוגמא: $f(x) = [x]$ רציפה מימין במספרים השלמים, אך לא רציפה משמאל בהם. (בשאר המספרים היא רציפה.)

4. גם ברציפות מימין ומשמאל יש ניסוחים שקולים בלי ניקוב הסביבה.

5. * תהי a נקודת הצטברות של תחום הפונקציה f מימין וגם משמאל.
f רציפה ב a $\Longleftrightarrow$ היא רציפה מימין וגם משמאל ב a.

20.2 רציפות בקטע סגור

1. f **רציפה בקטע סגור** $[a,b]$ אם היא רציפה בכל הנקודות של (a,b), ורציפה משמאל ב b, ורציפה מימין ב a.

שקול: הפונקציה f מוגדרת בכל הקטע $[a,b]$, והפונקציה המצומצמת $f|_{[a,b]}$ רציפה בכל הנקודות בקטע $[a,b]$.

2. אם $[a,b] \ni x_n \longrightarrow c$, אז גם $c \in [a,b]$.

3. אם f רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז לכל סדרה מתכנסת $x_n \longrightarrow c$ של נקודות בקטע, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow f(c)$.

20.3 משפט ערך הביניים

כאן אפשר לספר את הסיפור על הנהג מארץ עוץ. (נהג שנצפה במהירות 200 קמ"ש, חזקה עליו שנסע גם במהירות 120 קמ"ש.)

1. **משפט ערך הביניים:** אם f רציפה ב $[a,b]$ ו $f(a) < f(b)$ אז לכל $f(a) < d < f(b)$ יש $a < c < b$ המקיים $f(c) = d$.

משפט דומה כאשר $f(a) > f(b)$.

(תזכורת: אם $s := \sup A$ קיים, אז יש $A \ni a_n \nearrow s$.)

$x_n \nearrow c := \sup \{x \in [a,b] : f(x) \leq d\}$ בקבוצה. מרציפות, $f(c) \leq d < f(b)$. אילו $f(c) < d$ אז מרציפות אפשר להגדיל את c (ניקח סידרה שמתכנסת אליו מימין).

2. מסקנה: אם f רציפה ב $[a,b]$ ומחליפה סימן שם ($f(a) < 0 < f(b)$, או להיפך), אז היא מקבלת את הערך 0 בקטע (יש $c \in [a,b]$ המקיים $f(c) = 0$).

3. לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש שורש ממשי.

מספיק לבדוק פולינומים מתוקנים. $a_0 + a_1x + \cdots + 1x^n = (\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1)x^n \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$.

20.4 קבלת מקסימום ומינימום גלובליים בקטע סגור

1. **נקודת מקסימום גלובלית** של פונקציה f בתחום A: נקודה $c \in X$ כך ש $f(c) = \max_{x \in A} f(x)$.

אם קיימת, אומרים ש f מקבלת מקסימום בתחום A.

2. **משפט ויירשטרס:** פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום גלובליים שם.

(בפרט, הפונקציה חסומה שם.)

חסומה: אם אינה חסומה מלעיל, ניקח סידרה x_n בקטע כך ש $n \leq f(x_n) \longrightarrow \infty$ ותת־סידרה מתכנסת שלה $c_n \longrightarrow c$. $f(c_n) \longrightarrow f(c) < \infty$. סתירה.

מקבלת מקסימום: $f(x_n) \longrightarrow s := \sup \{f(x) : x \in [a,b]\} < \infty$. ניקח תת־סידרה מתכנסת $c_n \longrightarrow c$ של (c_n). $s \longleftarrow f(c_n) \longrightarrow f(c)$.

3. אם f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אז קבוצת ערכיה בקטע $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ היא קטע סגור.

$[\min f, \max f]$, ממשפט ערך הביניים.

20.5 הפונקציות האלמנטריות

1. פונקציה **עולה ממש:** אם $x_1 < x_2$ אז $f(x_1) < f(x_2)$.

2. ההופכית של פונקציה עולה ממש ורציפה בקטע סגור היא פונקציה עולה ממש ורציפה בקטע סגור.

הטווח הוא קטע סגור. חח"ע ולכן הפיכה.

רציפות בנקודה פנימית: נניח $y = f(x) \longrightarrow y_n = f(x_n)$. יהי $0 < \epsilon$. על ידי הקטנתו, אפשר להניח $x \pm \epsilon \in [a,b]$. $f(x - \epsilon) < f(x) = y < f(x + \epsilon)$. לבסוף, $f(x - \epsilon) < y_n < f(x + \epsilon)$ ולכן $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ לבסוף. (רציפות בקצוות דומה, כאשר לוקחים קטע חד־צדדי.)

3. הפונקציה $f(x) := e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ רציפה (מהאפיון של רציפות בעזרת סדרות) ועולה ממש, לכן הפיכה.

4. הפונקציה ההפוכה ל e^x נקראת $\log x$ (מה שבתיכון מסמנים $\ln x$). $\log x$ מוגדרת ורציפה בתחום $(0,\infty)$.

לכל n, $e^x|_{[-n,n]}\colon [-n,n] \longrightarrow [\frac{1}{e^n}, e^n]$ על (כפונקציה עולה ורציפה), ולכן $\log|_{[\frac{1}{e^n},e^n]}\colon [\frac{1}{e^n}, e^n] \longrightarrow [-n,n]$ רציפה.

כל נקודה חיובית היא נקודה פנימית באיזשהו קטע $[\frac{1}{e^n}, e^n]$, ולכן מרציפות הפונקציה $\log|_{[\frac{1}{e^n},e^n]}$ בנקודה זו, נובעת רציפות הפונקציה $\log$ באותה נקודה.

5. **פונקציה אלמנטרית:** פונקציה המתקבלת מהפונקציות הבסיסיות (פולינומים, פונקציות טריגונומטריות, e^x, $\log$) על ידי פעולות חשבוניות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק) והרכבה.

6. מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה.

7. דוגמאות: $a^x = e^{x\log a}$, $x^a = e^{a\log x}$ אלמנטריות. $[x]$ ופונקציית דיריכלה אינן אלמנטריות (לא רציפות).

21 רציפות במידה שווה

21.1 הגדרות שקולות

1. f **רציפה במידה שווה** בקבוצה X אם $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$, ולכל זוג סדרות $a_n, b_n \in X$ כך ש $|a_n - b_n| \longrightarrow 0$, מתקיים $|f(a_n) - f(b_n)| \longrightarrow 0$.

ההגדרה לא תשתנה אם נשמיט את הערך המוחלט.

2. דוגמא: $f(x) := |x|$ רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

3. דוגמא: $f(x) := \frac{1}{x}$ רציפה אך לא במידה שווה בקטע $(0,1]$.

ניקח את הסדרות $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}$.

4. אם f רציפה במידה שווה ב X, אז הפונקציה המצומצמת $f|_X$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ שהיא נקודת הצטברות של הקבוצה X.

בפרט, פונקציה רציפה במידה שווה בקטע סגור, רציפה בו.

אם לכל נקודה של X יש סביבה המוכלת כולה ב X (במקרה זה, הקבוצה X היא איחוד של קטעים פתוחים), אז רציפות $f|_X$ שקולה לרציפות f בכל נקודה של X.

5. f רציפה במידה שווה בקבוצה X $\iff$ $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$, ולכל $0<\epsilon$ יש $0<\delta$ כך ש $|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon$ לכל $x_1, x_2 \in X$ כך ש $|x_1 - x_2| \le \delta$.

בניסוח השקול, δ תלוי ב ϵ, אך אינו תלוי בנקודות x_1, x_2.

21.2 רציפות במידה שווה בקטע סגור

1. (קנטור) פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.

אחרת, יש בתחום סדרות $a_n - b_n \longrightarrow 0$, ויש $0<\epsilon$ כך ש $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$ עבור אינסוף ערכי n. נעבור לתת־סדרה, כך ש $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$ לכל n. נעבור לתת־סידרה, כך ש a_n מתכנסת. אז גם b_n מתכנסת לאותה נקודה, בסתירה לכך ש $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$.

21.3 פונקציות מחזוריות

1. f פונקציה **מחזורית:** יש $0<c$ כך ש $f(x) = f(x+c)$ לכל x.

2. $\sin x$, וכל פונקציה רציפה ומחזורית ב $\mathbb{R}$, רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.

יהי $0<c$ כך ש $f(x) = f(x+c)$ לכל x. f רציפה במידה שווה ב $[0,3c]$.

נניח $a_n - b_n \longrightarrow 0$. לכל n ניקח $k_n \in \mathbb{Z}$ כך ש $\tilde{a}_n := a_n + k_n c \in [c, 2c]$. לבסוף, $|a_n - b_n| \le c$ ואז $\tilde{b}_n := b_n + k_n c \in [0, 3c]$.

$\tilde{a}_n - \tilde{b}_n = a_n - b_n \longrightarrow 0$ והסדרות $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ לבסוף בקטע $[0,3c]$, לכן $f(a_n) - f(b_n) = f(\tilde{a}_n) - f(\tilde{b}_n) \longrightarrow 0$.

22 נגזרות

22.1 הגדרה ורציפות כתנאי הכרחי

1. **נגזרת** של פונקציה f, המוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, בנקודה פנימית $a<x<b$:
$f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$.
f **גזירה** בנקודה x אם הגבול קיים.

2. דוגמאות:
   (א) $c'=0$.
   (ב) $x'=1$.
   (ג) $(x^n)'=nx^{n-1}$.
   $(x+h)^n = x^n+nhx^{n-1}+h^2(\cdots)$.
   (ד) $\sin'(x)=\cos x$.
   נוסחת הסינוס והגבול $\sin h/h$ (גם עבור $(\cos h-1)/h$).
   (ה) $\log'(x)=\frac{1}{x}$.
   $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} e$: עבור $t\to\infty$: $\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \le \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \le \left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}$. לגבול משמאל
   משתמשים ב $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1}$.
   $\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} \longrightarrow e^{\frac{1}{x}}$.
   (ו) * (אפשר לדלג: מוכח בהמשך) $(e^x)'=e^x$.
   $\frac{e^h-1}{h} = \frac{t}{\log(1+t)} \longrightarrow \frac{1}{\log'(1)}=1$. (אם $0\neq h_n\to 0$ אז $0\neq t_n := e^{h_n}-1\to 0$.)

3. אם $y=f(x)$ גזירה בכל הנקודות הפנימיות בקטע, נקבל פונקציה $f'(x)$ שמוגדרת בקטע הפתוח (a,b) ונסמן גם $\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$.

4. אפשר להגדיר נגזרת מימין ונגזרת משמאל, ולראות ש f גזירה בנקודה אם ורק אם הנגזרות מימין ומשמאל בנקודה קיימות ושוות.

5. דוגמא: $|x|$ אינה גזירה ב 0, משום שהגבול מימין ומשמאל שונה.

6. אם f גזירה בנקודה a אז f רציפה בנקודה a.
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$. נכפול ב h.

22.2 חשבון נגזרות

1. * אם פונקציות u,v גזירות ב x, אז בנקודה x מתקיים:
   (א) $(u+v)'=u'+v'$.
   (ב) $(uv)'=u'v+v'u$.
   נוסיף ונחסר $u(x)v(x+h)$ להפרש $u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)$.
   (ג) $(cu)'=cu'$.
   (ד) אם $v\neq 0$ בסביבה של הנקודה x, אז:
      i. $\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$.
      ii. $\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv'}{v^2}$.
      iii. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

2. אם f מונוטונית ממש ורציפה בסביבה של a ו $f'(a)\neq 0$ (וקיימת), אז הפונקציה ההופכית f^{-1} גזירה בנקודה $b:=f(a)$, ומקיימת $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.
$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.
בדומה עבור נגזרת חד־צדדית.
גם f^{-1} מונוטונית ממש ורציפה בסביבה של b.
אם $b\neq y_n\longrightarrow b$ אז $a\neq x_n := f^{-1}(y_n)\longrightarrow f^{-1}(b)=a$ ולכן $\frac{1}{f'(a)} \longleftarrow \frac{1}{\left(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right)} = \frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}$.

3. דוגמא: בכל נקודה x, נסמן $y := e^x$. אז $(e^x)' = (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{(\log)'(y)} = y = e^x$.

4. הערה: אם f חח"ע ורציפה בקטע (כגון סביבה של נקודה a), אז היא מונוטונית ממש.
ממשפט ערך הביניים: אם $x_1 < x_2 < x_3$, ולמשל $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ אז אחד מבין $f(x_1), f(x_3)$ נמצא בין שני האחרים, למשל $f(x_2) > f(x_1) > f(x_3)$.
אז יש $x_2 < c < x_3$ עם $f(x_1) = f(c)$, סתירה.

22.3 כלל השרשרת

1. כלל השרשרת: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.
נחלק ונכפול את $\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$ ב $f(x+h) - f(x)$.
כדי להמנע ממכנה 0 ניעזר בפונקציה $D(h) := \begin{cases} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} & f(x+h) \neq f(x) \\ g'(f(x)) & f(x+h) = f(x) \end{cases}$.

2. דוגמאות:
(א) $\cos'(x) = -\sin x$.
$\cos x = \sin(x + \pi/2)$.
(ב) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
(ג) $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
(ד) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.
(ה) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
אם $-\frac{\pi}{2} \leq y = \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ אז $0 \leq \cos y$.
(ו) $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(ז) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$.
(ח) $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. בכל הדוגמאות, אם נציב פונקציה u במקום x, יש לכפול את הנגזרת ב $u'(x)$ בשל כלל השרשרת.

אפשר לדלג על שני הסעיפים הבאים בשלב זה.

1. נגזרת מסדר $n = 0, 1, 2, \ldots$ מוגדרת באינדוקציה על n:
(א) $f^{(0)} := f$.
(ב) $f^{(1)} := f'$.
(ג) $f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$.

2. דוגמא: נגזרת מסדר $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ של $\sin x$: $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \ldots$ (מחזורי).

23 משפטים יסודיים לגבי נגזרות

23.1 משפטים על התאפסות הנגזרת

1. **נגזרת מימין:** $f'_+(a) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
נגזרת משמאל: $f'_-(a) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. הנגזרת קיימת אם ורק אם הנגזרות מימין ומשמאל קיימות ושוות (ושווה לה).

3. משפט (פרמה): אם c נקודת מקסימום (או מינימום) של f בקטע פתוח והנגזרת $f'(c)$ קיימת, אז $f'(c)=0$.

המקרה של מקסימום: $f(c+h)-f(c)\leq 0$ ולכן $f'(c)=f'_+(c)\leq 0\leq f'_-(c)=f'(c)$.

4. דוגמא שהמשפט לא נכון בקטע סגור: $f(x):=x$ ב $[0,1]$.

5. משפט (רול): אם f רציפה ב $[a,b]$, גזירה ב (a,b), ו $f(a)=f(b)$, אז יש $a<c<b$ שעבורו $f'(c)=0$.

f מקבלת מקסימום ומינימום בקטע. אם שווים היא קבועה. אחרת, לפחות אחד מהם בתוך הקטע הפתוח.

6. מספיק להניח במשפט שהגבולות ב a^+ וב b^- קיימים ושוים (שאז אי־הרציפות סליקה).

7. דוגמא: למשוואה x^3+ax+b יש בדיוק שורש ממשי אחד כאשר $0<a$.

הנגזרת היא $0<3x^2+a$.

23.2 משפטי הערך הממוצע

1. **משפט הערך הממוצע** (לגרנז'): אם f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), יש $a<c<b$ שעבורו $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

שיפוע הגרף בנקודה $(c,f(c))$ שווה לשיפוע הישר בין הנקודות $(a,f(a))$ ו $(b,f(b))$.

נחסר מ $f(x)$ את משוואת הישר.

2. * **משפט הערך הממוצע המוכלל** (קושי): אם f,g רציפות ב $[a,b]$ וגזירות ב (a,b), ובנוסף $g'(x)\neq 0$ בקטע, אז יש $a<c<b$ שעבורו $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

$g(a)\neq g(b)$. ניקח $\tilde{f}(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ (כמו במשפט הקודם, אבל עם g).

3. תהי f גזירה בסביבת נקודה a. אם הפונקציה f' אינה רציפה בנקודה a, אז זו אי־רציפות מסוג שני (עיקרית, כלומר אחד הגבולות החד־צדדיים לא קיים).

נניח שהגבולות החד־צדדיים של f' קיימים. לכל $a<x$ בסביבה, יש נקודה $a<c(x)<x$ שבה $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c(x))$.

אם $x_n\longrightarrow a^+$, אז $c(x_n)\longrightarrow a^+$ ולכן $f'(a)=\lim_n\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=\lim_n f'(c(x_n))=\lim_{x\to a^+}f'(x)$, ובדומה לגבול השמאלי.

4. דוגמא: אין פונקציה $f(x)$ כך ש $f'(x)=[x]$.

23.3 משפט ערך הביניים עבור הנגזרת

1. פונקציית הנגזרת אינה בהכרח רציפה: הפונקציה

$$f(x):=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

גזירה בכל הישר הממשי, אך הפונקציה f' (שיש לחשב לפי ההגדרה בנקודה 0) לא רציפה בנקודה 0.

2. פונקציה היא **גזירה בקטע סגור** אם היא גזירה בכל נקודה פנימית שלו, ובעלת נגזרת חד־צדדית (בכיוון הרלוונטי) בקצוות.

3. * משפט (דרבו): אם f גזירה בקטע סגור $[a,b]$ אז $f'(x)$ מקבלת בקטע (a,b) כל ערך בין $f'_-(b)$ ל $f'_+(a)$.

יהי $f'_+(a)<d<f'_-(b)$. $\tilde{f}(x):=f(x)-dx$ גזירה ב $[a,b]$, רציפה, ולכן יש נקודת מינימום $a\leq c\leq b$.

$\lim_{h\to 0^+}\frac{\tilde{f}(a+h)-\tilde{f}(a)}{h}=f'_+(a)-d<0$, לכן $\tilde{f}(a+h)-\tilde{f}(a)<0$ עבור $0<h$ קטן, לכן $c\neq a$. כך גם $c\neq b$, ולכן $\tilde{f}'(c)=0$.

24 כלל לופיטל לחישוב גבולות של מנות

24.1 המשפט הכללי

1. **כלל לופיטל:** יהיו $\lambda \in \{0,\infty\}$, $-\infty \le a,b \le \infty$. יהיו f,g גזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות:

(א) $f(x),g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$.

(ב) $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a]{} b$ במובן הרחב. (בפרט, $g'(x)\neq 0$ בסביבה של a.)

אזי $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} b$.

המשפט, עם אותה הוכחה, תקף גם עבור סביבה חד־צדדית של a וגבולות חד־צדדיים מתאימים.

24.2 המקרה $\frac{0}{0}$

1. הוכחת כלל לופיטל במקרה $\lambda = 0$ ($\frac{0}{0}$), a ממשי, גבול מימין: על ידי סילוק אי־רציפות, אפשר להניח $f(a)=g(a)=0$.

מרול, $g(x)\neq 0$ בסביבה ימנית של a.

ממשפט הערך הממוצע המוכלל, $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \xrightarrow[x\to a^+]{} b$.

2. דוגמאות:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(e-x)+x-1}$.

(ב) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$: ניתן לחישוב ישיר אך לופיטל לא עוזר.

(ג) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$: צריך להשתמש בלופיטל פעמיים.

3. הוכחת כלל לופיטל במקרה $\lambda = 0$ ($\frac{0}{0}$), $a=\infty$: מרול, לא ייתכנו שני אפסים של g בקרן, ולכן אפשר להניח שאין אפסים של g בסביבה מהצורה $(0<\alpha,\infty)$.

$G(t) := g(\frac{1}{t}), F(t) := f(\frac{1}{t})$ מקיימות תנאי המשפט הקודם בסביבה ימנית של 0.

4. דוגמאות:

(א) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{3}{x}}$.

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\log(1+\frac{1}{x})}$.

24.3 המקרה $\frac{\infty}{\infty}$

1. בהוכחת המשפט למקרה זה, לא נשתמש בנתון $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$. המשפט תקף גם ללא נתון זה.

2. במובן הרחב: $a_n \longrightarrow a \iff$ לכל תת־סידרה (b_n) של (a_n) יש תת־סידרה (c_n) של (b_n) כך ש $c_n \longrightarrow a$.

(במילים: לכל תת־סידרה של (a_n) יש תת־סידרה ששואפת ל a.)

$(\Rightarrow)$ אם $a_n \not\longrightarrow a$, יש סביבה של a עם תת־סידרה מחוץ לה.

3. מסקנה: $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b \iff$ לכל סידרה $a\neq x_n \longrightarrow a$, יש תת־סידרה (z_n) המקיימת $f(z_n)\longrightarrow b$.

4. * הוכחת כלל לופיטל במקרה $\frac{\infty}{\infty}$, a ממשי, גבול חד־צדדי:

על ידי הקטנת הסביבה, אפשר להניח ש $g(x)\neq 0$ שם.

נקבע סידרת עזר $a_n \to a^+$. יהי n מספר טבעי קבוע כלשהו.

תהי $x_n \to a^+$. ניקח לה תת־סידרה z_n המקיימת

(א) $z_n < a_n$.

(ב) $\left|\frac{f(a_n)}{g(z_n)}\right|, \left|\frac{g(a_n)}{g(z_n)}\right| < \frac{1}{n}$, ובפרט $g(z_n)\neq g(a_n)$ ומתקיים $\frac{f(a_n)}{g(z_n)}, \frac{g(a_n)}{g(z_n)} \longrightarrow 0$.

ממשפט הערך הממוצע המוכלל, לכל n יש נקודה $z_n < c_n < a_n$ שעבורה

$$\frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(a_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(a_n)}{g(z_n)}} = \frac{f(z_n) - f(a_n)}{g(z_n) - g(a_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \longrightarrow b.$$

5. הוכחת כלל לופיטל במקרה $\lambda = \infty$ $(\frac{\infty}{\infty})$, $a = \infty$ נובעת כמו קודם. את המקרים ש $a = -\infty$ ניתן להסיק על ידי הגדרה $\tilde{f}(t) = f(-t)$ וכולי.
6. דוגמא: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$: מסתבך עם לופיטל, אך $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ ושם לופיטל מצליח.
7. טיפול בביטויים לא מוגדרים נוספים (נוסחאות לא נכונות אך עוזרות לזכור את הטריק):
   (א) $0^+ \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$ או $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0^+} = \frac{0}{0}$.
   (ב) לחישוב 1^∞ נוציא $\log$: $\log(1^\infty) = \infty \log 1 = \infty \cdot 0$. לאחר הטיפול, ניקח e בחזקת זה.
8. דוגמא: $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

24.4 חישוב גבולות של סדרות בעזרת לופיטל

1. דוגמא: $\frac{\log n}{n} \longrightarrow 0$ כי מלופיטל $\frac{\log x}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.