# חזקות ממשיות - סקירה

בועז צבאן

22 בנובמבר 2015

## 1 חזקות רציונליות של מספר ממשי

1. **אי־שויון ברנולי:** יהי $-1 < a \neq 0$. לכל $1 < n$ מתקיים $(1+a)^n > 1 + na$.
אינדוקציה + פתיחת סוגריים.
2. לכל $0 < a < b$ ולכל $n$:
(א) יש $0 < c < 1$ כך ש $a < bc^n$.
(ב) יש $1 < c$ כך ש $ac^n < b$.
(א) מאי־שיויון ברנולי, $b(1-n\epsilon) < b(1-\epsilon)^n$. נמצא $0 < \epsilon < 1$ כך ש $a < b(1-n\epsilon)$.
(ב) מ (א), על ידי העברת אגף.
3. **השורש ה $n$־י של $a$:** לכל $0 < a$ ולכל $n$ קיים $0 < b$ יחיד כך ש $b^n = a$. $b$ זה יסומן $\sqrt[n]{a}$, או $a^{\frac{1}{n}}$.
תהי $A := \{x : x^n \leq a\}$. הקבוצה לא ריקה ($0 \in A$), וחסומה מלעיל ($x \leq x^n \leq a$ או $x \leq 1$).
$b := \sup\{x : x^n \leq a\}$.
אילו $b^n < a$ או $a < b^n$, נשתמש בטענה הקודמת (עם $c^n$ בצד של $b^n$, כך שנקבל $(bc)^n$) ונקבל סתירה.
יחידות: אם $b_1 < b_2$ אז $b_1^n < b_2^n$.
4. **חזקה רציונלית:** יהי $0 < a$. עבור $m$ שלם ו $n$ טבעי, $a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{\frac{1}{n}}$.
5. החזקה הרציונלית מקיימת גם היא את התכונות הנזכרות בסעיף 14.

## 2 חזקות ממשיות של מספר $0 < a$

1. אם $0 \longrightarrow q_n \in \mathbb{Q}$, אז $1 \longrightarrow a^{q_n}$.
יהי $0 < \epsilon$. ניקח $k$ כך ש $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \epsilon$. לבסוף, $-\frac{1}{k} < q_n < \frac{1}{k}$.
2. לכל מספר ממשי $b$ יש סידרה $b \nearrow q_n \in \mathbb{Q}$.
בהנתן $q_n$ ניקח $q_n < q_{n+1} < b$ כך ש $b - q_{n+1} < \frac{1}{2}(b - q_n)$.
3. אם $b \longrightarrow q_n, r_n \in \mathbb{Q}$, אז הסדרות $(a^{q_n}), (a^{r_n})$ מתכנסות, ולאותו גבול.
ניקח $b \nearrow c_n \in \mathbb{Q}$. $x := \lim a^{c_n}$ גבול של סידרה מונוטונית חסומה (בנפרד עבור $1 \leq a$ ו $a < 1$). מהנ"ל, $\lim a^{q_n} = \lim a^{c_n} = \lim a^{r_n}$.
4. נגדיר $a^b := \lim a^{q_n}$ כאשר $b \longrightarrow q_n \in \mathbb{Q}$.
5. אם $1 \leq a$ ו $b \leq c$ אז $a^b \leq a^c$.
ניקח סדרות רציונליות $b \longleftarrow q_n \leq r_n \longrightarrow c$.
6. אם $b_n \longrightarrow b$ אז $a^{b_n} \longrightarrow a^b$.
ניקח סדרות רציונליות $q_n < b_n < r_n$ כך ש $r_n - q_n \longrightarrow 0$ ונכין סנדביץ' עם $a^{b_n}$.
7. $a^b a^c = a^{b+c}$.
$a^b a^c \longleftarrow a^{q_n} a^{r_n} = a^{q_n + r_n} \longrightarrow a^{b+c}$.

8. $a^c b^c = (ab)^c$.
9. אם $1 \longrightarrow a_n > 0$ אז $a_n^b \longrightarrow 1$ לכל $b$.
המקרה $b \geq 0$: נקבע $k \geq b$ טבעי. יהי $\epsilon > 0$. לבסוף, $a_n^b < (1+\epsilon)^k \leq 1 + 2^k\epsilon$, ועם ברנולי, לבסוף $1 - 2^k\epsilon < (1-\epsilon)^k < a_n^b$.
10. אם $0 < a \longrightarrow a_n > 0$ אז $a_n^b \longrightarrow a^b$ לכל $b$.
$\left(\frac{a_n}{a}\right)^b \longrightarrow 1$.
11. $(a^b)^c = a^{bc}$.
מראים קודם ל $b$ רציונלי ואחר כך עם סדרה $\mathbb{Q} \ni b_n \longrightarrow b$.
12. אפשר להוכיח גם את שאר כללי החזקה הרגילים.
13. יהי $a > 1$.
(א) אם $b_n \longrightarrow \infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow \infty$.
(ב) אם $b_n \longrightarrow -\infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow 0$.
14. יהי $0 < a < 1$.
(א) אם $b_n \longrightarrow \infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow 0$.
(ב) אם $b_n \longrightarrow -\infty$ אז $a^{b_n} \longrightarrow \infty$.