

# התכנסות סידרה תלויה רק "בזנב"

בועז צבאן

4 בנובמבר 2018

למי שלא הצליח להשלים בעצמו את כל הפרטים של הוכחת הטענה הבאה, או שאינו בטוח שהוכחתו נכונה, אצרף הוכחה של הטענה.

**טענה.** תהי  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  סידרה המתקבלת מסידרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  על ידי מחיקה, הוספה, או שינוי של מספר סופי של איברים. אזי הסדרות מתכנסות ומתבדרות יחד. במקרה שהן מתכנסות, גבולן שווה.

אינטואיטיבית הטענה ברורה, כי התכנסות תלויה רק במה שקורה "לבסוף". אבל הוכחה מסודרת צריכה פרטים נוספים.

הוכחת הטענה: מספיק להוכיח את הטענה עבור כל אחד מהשינויים בנפרד, כי כל שינוי של מספר סופי של איברים אפשר לקבל על ידי ביצוע מחיקה (מקבלים סידרה שניה), לאחר מכן הוספה (מקבלים סידרה שלישית), ולאחר מכן שינוי של איברים (מקבלים סידרה רביעית). אם הטענה הוכחה לכל זוג סדרות סמוך (ראשונה ושניה, שניה ושלישית, שלישית ורביעית), נקבל את הטענה גם עבור הסידרה הראשונה והאחרונה.

מחיקת מספר סופי של איברים: אם הסידרה  $(b_n)$  מתקבלת מהסידרה  $(a_n)$  על ידי מחיקת מספר סופי של איברים, אז אפשר להגיע מהסידרה  $(a_n)$  לסידרה  $(b_n)$  על ידי מספר סופי של מעברים, כשבכל פעם מוחקים רק איבר אחד מהסדרה. לכן, מספיק להראות שמחיקת איבר אחד מסידרה אינה משנה את התכנסותה ואת גבולה. נניח איפוא שמחקנו מהסידרה  $(a_n)$  את האיבר במקום ה- $k$ , האיבר  $a_k$ . אז

$$(b_1, b_2, \dots) = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

נניח ש  $a_n \rightarrow a$  עלינו להוכיח ש  $b_n \rightarrow a$ .

יהי  $\epsilon > 0$ . ניקח  $N$  כך ש  $|a_n - a| \leq \epsilon$  לכל  $n \leq N$ . נקבע  $\tilde{N}, k \leq \tilde{N}$ . לכל  $n \leq \tilde{N}$ ,  $b_n = a_{n+1}$  (כי  $k \leq n$ ) וכיון ש  $N \leq n+1$  ולכן

$$|b_n - a| = |a_{n+1} - a| \leq \epsilon$$

זה מראה ש  $b_n \rightarrow a$ .

כעת נניח ש  $a_n \rightarrow a$  עלינו להוכיח ש  $a_n \rightarrow a$ .

יהי  $\epsilon > 0$ . ניקח  $N$  כך ש  $|b_n - a| \leq \epsilon$  לכל  $n \leq N$ . נקבע  $\tilde{N}, k+1 \leq \tilde{N}$ . לכל  $n \leq \tilde{N}$ ,  $a_n = b_{n-1}$  (כי  $k+1 \leq n$ ) וכיון ש  $N+1 \leq n-1$  מתקיים  $N \leq n-1$  ולכן

$$|a_n - a| = |b_{n-1} - a| \leq \epsilon$$

זה מראה ש  $a_n \rightarrow a$ .

הוספת מספר סופי של איברים: במקרה זה, שקול לומר שהסידרה  $(a_n)$  התקבלה מהסידרה  $(b_n)$  על ידי מחיקה של מספר סופי של איברים, ולכן מהמקרה שכבר טיפלנו בו, הסדרות מתכנסות (לאותו גבול) ומתבדרות יחד.

שינוי מספר סופי של איברים: שינוי זה ניתן לבצע כמספר סופי של שינויים של איבר אחד בכל פעם. שינוי איבר בסידרה אפשר לקבל על ידי מחיקת איבר והוספת איבר אחר במקומו. ראינו לעיל שאף אחת מפעולות אלה אינה משנה את התכנסות או התבדרות הסידרה.

מ.ש.ל.