חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תש"פ, מועד א' - **פתרון**

משך המבחן. שלוש שעות.
חומר עזר מותר בשימוש: אין; גם לא מחשבון. יש לנמק באופן מלא את התשובות, ולהגיע לצורה הפשוטה ביותר של הפתרון.
שימו לב: שאלות $1,2$ הן חובה. יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות 3-7. המספרים בסוגריים לפני כל סעיף מציינים את מספר הנקודות עבור תשובה מלאה.

1. (חובה). תרגם את הטענות הבאות לפי ההגדרה. בתשובה מותר להשתמש בפעולות השדה, ביחס הסדר, בקשרים הלוגיים ('וגם', 'או', 'לא') ובכמתים 'לכל' ו־'קיים', אבל לא במושגים שהגדרנו (כגון גבול, סביבה, חסם או התכנסות).

דגשים לשאלה זו. מי שלא קיבל ניקוד מלא בשאלה זו אמור להבין מכך מדוע לא הצליח בבחינה: אי אפשר להבין את המקצוע בלי לדעת את הגדרות היסוד שלו. שימו לב במיוחד לניסוחים שבהם חסרים קשרים לוגיים או כמתים; בלעדיהם אי אפשר לדעת מהו המשתנה המופיע בהמשך התשובה - האם מדובר בערך כלשהו? בערך ידוע? בכל ערך אפשרי? שימו לב גם שאסור להשתמש במושג הגבול; התבקשתם לפרק גם אותו לפי ההגדרה.

(א) $\langle 2\rangle$ הסדרה $\frac{3+(-1)^n}{n}$ אינה מתכנסת ל־5.

פתרון. קיים $\epsilon>0$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ כך ש־$\left|\frac{3+(-1)^n}{n}-5\right|\geq\epsilon$.

(ב) $\langle 2\rangle$ הפונקציה $\frac{1}{x-2}$ רציפה במידה שווה בקטע $(5,6]$.

פתרון. לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $5<x,y\leq 6$, אם $|x-y|<\delta$ אז $\left|\frac{1}{x-2}-\frac{1}{y-2}\right|<\epsilon$.

(ג) $\langle 2\rangle$ הנגזרת של $\arctan(x)$ בנקודה $x=1$ היא $1/2$.

פתרון. לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|h|<\delta$ אז $\left|\frac{\arctan(1+h)-\arctan(1)}{h}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon$.

(ד) $\langle 2\rangle$ לקבוצה $\left\{(1+\frac{1}{n})^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ יש חסם עליון.

פתרון. קיים מספר a כך שלכל b, $b\geq(1+\frac{1}{n})^n$ לכל n אם ורק אם $b\geq a$.

(ה) $\langle 2\rangle$ הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה רציפה מימין ב־$x=0$.

פתרון. קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x כך ש־$0<x<\delta$ ובכל זאת $|\sin(1/x)-0|\geq\epsilon$.

2. (חובה). מצא דוגמא נגדית לכל אחת מן הטענות הבאות.

(א) $\langle 3\rangle$ "אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(3,7]$, אז היא חסומה שם."

פתרון. עלינו לבחור פונקציה שאינה רציפה ב־$x=3$, משום שאחרת היא תהיה חסומה לפי ויירשטראס. למשל הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x-3}$.

(ב) $\langle 4\rangle$ "אם $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו־ $0<b_n$ לכל n, אז $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$."

פתרון. למשל הסדרות $a_n=n$ ו־$b_n=\frac{1}{n}$; אכן $a_n\to\infty$ ובכל זאת $a_nb_n\not\to\infty$.

(ג) $\langle 5\rangle$ "אם $f(x)$ רציפה ב־$(0,1)$ וב־$(-1,0)$ וחסומה ב־$[-1,1]$ אז היא רציפה ב־0."

פתרון. יש לבחור פונקציה המוגדרת בכל הקטע $[-1,1]$ (אחרת אין מובן לטענה שהיא חסומה שם). למשל $f(x)=\delta_{x,0}=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$.

(ד) $\langle 6\rangle$ "אם $0<f(x)<1$ ורציפה במידה שווה בקטע $(1,2)$ אז $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ רציפה במידה שווה שם."

פתרון. אם $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ תהיה רציפה בקטע הסגור $[1,2]$, אז היא תהיה רציפה שם במידה שווה, וממילא גם רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(1,2)$. לכן עלינו לבחור $f(x)$ כך ש־$\frac{f(x)}{1-f(x)}$ לא רציפה בקצוות, למשל משום שהמכנה מתאפס. אכן, אם ניקח $f(x)=x-1$ (העונה על הדרישות), אז $g(x)=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{x-1}{2-x}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(1,2)$ משום שאם ניקח $x_n=2-\frac{1}{n}$, נקבל $g(x_{n+1})-g(x_n)\not\to 0$ על אף ש־$x_{n+1}-x_n\to 0$.

3. חשב את הגבולות הבאים (כולל נימוקים מלאים).

(א) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-7x+8}{x^3-8}$.

פתרון. המונה שואף ל־$8-14+8=2$, והמכנה שואף לאפס מימין. לכן המנה שואפת לאינסוף.

(ב) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(4x)-2\cdot\sin(2x)}{(x-\pi)^3}$.

פתרון. נסמן $f(x)=\frac{\sin(4x)-2\cdot\sin(2x)}{(x-\pi)^3}$. המונה והמכנה שואפים לאפס, ולכן מותר להפעיל את כלל לופיטל: $f(x)\sim\frac{4[\cos(4x)-\cos(2x)]}{3(x-\pi)^2}$. שוב המונה והמכנה שואפים לאפס (כאשר $x\to\pi$), ולכן מותר להפעיל שנית את כלל לופיטל: $f(x)\sim\frac{4[-4\sin(4x)+2\sin(2x)]}{6(x-\pi)}$. אף הפעם המונה והמכנה שואפים לאפס, ולכן נפעיל את הכלל בפעם השלישית: $f(x)\sim\frac{4[-16\cos(4x)+4\cos(2x)]}{6}\to\frac{4[-16+4]}{6}=-8$. לכן זהו הגבול המבוקש.

(ג) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to\infty}x^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

פתרון. ראשית נחשב את גבולה של החזקה: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$. כלומר, הגבול הוא מהצורה ∞^0, וכדי לחשב אותו נעבור ללוגריתם: $\log(x^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}})=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\log(x)=\frac{\log(x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x+1})+1/(2\sqrt{x})}=\frac{2}{x/\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$. כלומר, הפונקציה עצמה שואפת ל־$e^0=1$.

4. (א) $\langle 10\rangle$ הפונקציה $f(x)$ רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). הוכח: אם $\lim_{x\to a^+}f'(x)=L$, אז f גזירה מימין ב־a ו־ $f'(a)=L$. הצעה: משפט הערך הממוצע.

פתרון. עלינו להוכיח כי $L=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה. תהי $x_n\to a$ סדרה מתכנסת כך ש־$a<x_n$ לכל n. מכיוון שהפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,x_n]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,x_n), קיימת לפי משפט הערך הממוצע נקודה $y_n\in(a,x_n)$ כך ש־$f'(y_n)=\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$. לפי משפט הסנדוויץ', $y_n\to a$ (מימין). לפי ההנחה $f'(y_n)\to L$, כלומר $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\to L$, כפי שרצינו.

(ב) $\langle 8\rangle$ הוכח: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \to 0$.

פתרון. נסמן ב־$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ את סדרת הסכומים החלקיים. לפי ההנחה הגבול $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ קיים, ולכן גם $\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = L$ (זוהי תת־סדרה!). לפי חיסור גבולות, $\lim a_{n+1} = \lim(s_{n+1} - s_n) = L - L = 0$. [אפשר גם לפי קריטריון קושי.]

5. (א) $\langle 9\rangle$ הוכח: אם $\lim(a_n) = A$ ו־$\lim(b_n) = B$, אז $\lim(a_n b_n) = AB$.

פתרון. ראשית, קיים N_0 כך שאם $n \geq N_0$ אז $|a_n - A| < 1$, ואז $|a_n| \leq |A|+1$. כעת יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים N' כך שאם $n \geq N'$ אז $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2(|B|+1)}$; וקיים N'' כך שאם $n \geq N''$ אז $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2(|A|+1)}$. כעת נבחר $N = \max\{N_0, N', N''\}$; אם $n \geq N$ אז

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \leq |a_n|\,|b_n - B| + |a_n - A|\,|B| \\ &< (|A|+1)\frac{\epsilon}{2(|A|+1)} + \frac{\epsilon}{2(|B|+1)}\,|B| < \epsilon. \end{aligned}$$

(ב) $\langle 9\rangle$ הוכח שלכל $x > 1$ מתקיים $\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{x^2+1} < \arctan(x) < \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$.

פתרון. כידוע $\tan(\pi/4) = 1$ ולכן $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. עלינו להוכיח כי $\frac{1}{x^2+1} < \frac{\arctan(x)-\arctan(1)}{x-1} < \frac{1}{2}$. נתבונן בפונקציות $f(t) = \arctan(t)$ ו־$g(t) = t - 1$. שתיהן רציפות וגזירות בקטע הסגור $[1, x]$ ולכן משפט הערך הממוצע של קושי קובע שקיימת נקודה $t \in (1, x)$ כך ש־$\frac{1}{t^2+1} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{\arctan(x)-\arctan(1)}{x-1}$. והרי $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{t^2+1} < \frac{1}{2}$ כאשר $1 < t < x$.

6. $\langle 18\rangle$ הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$. הוכח שהפונקציה חסומה בקטע (זהו משפט ויירשטראס על פונקציות רציפות בקטע סגור).

פתרון. נניח, בשלילה, שהפונקציה אינה חסומה, ובלי הגבלת הכלליות נניח שאינה חסומה מלעיל. לכן לכל n קיים $x_n \in [a, b]$ כך ש־$f(x_n) > n$. הסדרה (x_n) חסומה ולפי בולצאנו־ויירשטראס יש לה תת־סדרה מתכנסת, $x_{n_k} \to x_0$, וכמובן $x_0 \in [a, b]$. לפי הרציפות ב־x_0, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, ומצד שני $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq \lim n_k = \infty$, בסתירה.

7. (א) $\langle 12\rangle$ הצע בניה של שדה המספרים הממשיים. עליך לתאר במדוייק מהו מספר ממשי, כיצד מחברים שני מספרים ממשיים, וכיצד קובעים אם מספר ממשי גדול ממש מאפס.

פתרון. שדה המספרים הממשיים נבנה כ**השלמה** של שדה המספרים הרציונליים. כלומר, מספר ממשי הוא מחלקת שקילות של סדרות קושי של מספרים רציונליים, כאשר יחס השקילות מוגדר כך ש־$(a_n) \sim (b_n)$ אם $a_n - b_n \to 0$. השיכון של הרציונליים בממשיים שולח מספר רציונלי r למחלקת השקילות של הסדרה הקבועה $(r, r, \dots)$. החיבור מוגדר לפי חיבור רכיב־רכיב של נציגים: $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$. מספר ממשי $[(a_n)]$ הוא חיובי אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שממקום מסויים ואילך $a_n > \epsilon$.

(ב) $\langle 6\rangle$ הבניה מסעיף א' מבוססת על המספרים הרציונליים. מה יקרה אם נחליף בה את הרציונליים בממשיים? הסבר.

פתרון. שדה המספרים הממשיים הוא שדה ארכימדי שלם, ולכן ההשלמה שלו שווה לו. כלומר, חזרה על הבניה תתן שוב את אותו השדה של המספרים הממשיים. באופן מפורש יותר, כל סדרת קושי של ממשיים מתכנסת למספר ממשי, ולכן כל סדרת קושי של ממשיים שקולה לסדרה קבועה $(\alpha, \alpha, \dots)$. לכן המעבר משדה הממשיים להשלמה שלו אינו מוסיף אף איבר חדש.