

חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תש"פ, בחינה לדוגמא

משך המבחן. שלוש שעות.

חומר עזר מותר בשימוש: אין; גם לא מחשבון.
יש לנמק באופן מלא את התשובות, ולהגיע לצורה הפשוטה ביותר של הפתרון.
שימו לב: שאלות 1, 2 הן חובה. יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות 3-7. המספרים בסוגריים לפני כל סעיף מציינים את מספר הנקודות עבור תשובה מלאה.

1. (חובה). תרגם את הטענות הבאות לפי ההגדרה. בתשובה מותר להשתמש בפעולות השדה, ביחס הסדר, בקשרים הלוגיים ('וגם', 'או', 'לא') ובכמתים 'לכל' ו-'קיים', אבל לא במושגים שהגדרנו (כגון גבול, סביבה, חסם או התכנסות).

(א) $\langle 2 \rangle$ הגבול של x^3 כאשר $x \rightarrow 5$ הוא 125.

(ב) $\langle 2 \rangle$ $\sup \{r^2 \in \mathbb{Q} \mid r < 3\} = 9$.

(ג) $\langle 2 \rangle$ הסדרה $a_n = \sin(1/n)$ אינה מתכנסת.

(ד) $\langle 2 \rangle$ הפונקציה $f(x) = 1/x$ רציפה במידה שווה בקרן $[1, \infty)$.

(ה) $\langle 2 \rangle$ לפונקציה $x^3 + x$ נגזרת חיובית ממש (דהיינו גדולה מ-0) לכל x ממשי.

2. (חובה). מצא דוגמא נגדית לכל אחת מן הטענות הבאות.

(א) $\langle 3 \rangle$ "כל פונקציה רציפה וחסומה ב- $(-2, 2)$ היא גזירה."

(ב) $\langle 4 \rangle$ "פונקציה רציפה בקטע $(2, 3)$ היא חסומה."

(ג) $\langle 5 \rangle$ "תהיינה a_n, b_n סדרות חיוביות. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ אז בהכרח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$."

(ד) $\langle 6 \rangle$ "אם $f(x)$ רציפה במידה שווה בכל הישר, אז גם $f(x^2)$ רציפה במידה שווה בכל הישר."

3. חשב את הגבולות הבאים (כולל נימוקים מלאים).

(א) $\langle 6 \rangle$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(e^x + 1) - x$

(ב) $\langle 6 \rangle$ $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1 - \sin(\pi x)}{(1 - 4x^2)^2}$

(ג) $\langle 6 \rangle$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x)^{1/\log(x)}$

4. תהי $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ פונקציה גזירה.

(א) $\langle 6 \rangle$ הוכח שקיים פתרון למשוואה $f(x) = x$.

(ב) $\langle 12 \rangle$ נניח ש- $f'(x) = 1 + f(x)^2$ לכל $0 \leq x \leq 1$. הוכח שלמשוואה $f(x) = x$ יש בדיוק פתרון אחד.

5. (א) $\langle 8 \rangle$ הוכח: אם f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה עם נגזרת חיובית ממש ב- (a, b) , אז f עולה ב- $[a, b]$.

(ב) $\langle 10 \rangle$ הפונקציה f רציפה ב- $[0, \infty)$, ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. הוכח ש- f רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

6. $\langle 18 \rangle$ הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$. הוכח שהפונקציה רציפה במידה שווה.

7. (א) $\langle 4 \rangle$ הגדר מתי שדה סדור הוא ארכימדי.

(ב) $\langle 4 \rangle$ הוכח ששדה המספרים הרציונליים הוא ארכימדי.

(ג) $\langle 10 \rangle$ הסבר בקצרה מדוע כל שדה ארכימדי מוכל בשדה המספרים הממשיים.

דף נוסחאות. $\sin(0) = 0, \cos(0) = 1, \sin(\pi/2) = 1, \sin(\pi/2) = 0, \log(e) = 1$.

בהצלחה.