מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה

מועדים א' וב' - **פתרון** לכמה שאלות, תשע"א

מועד א'.

1. נגדיר סדרה של משתנים מקריים באופן הבא: $X_0 = \lambda$ הוא קבוע, ולכל n, בהנתן X_n, $X_{n+1} \sim \mathrm{P}(X_n)$.[1]

   (א) חשבו את התוחלת $\mathbf{E}(X_n)$.

   (ב) חשבו את השונות $\mathbf{V}(X_n)$.

   (ג) לכל $n < m$, חשבו את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$.

   (ד) הראו שלכל $i < j < n < m$, $X_m - X_n$ ו-$X_j - X_i$ בלתי מתואמים.

   פתרון. לפי הנתון $\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n) = X_n$, ולכן

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n)) = \mathbf{E}(X_n),$$

ובאינדוקציה $\mathbf{E}(X_n) = \lambda$. בדומה לזה

$$\mathbf{V}(X_{n+1}) = \mathbf{V}(\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n)) + \mathbf{E}(\mathbf{V}(X_{n+1}|X_n)) = \mathbf{V}(X_n) + \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{V}(X_n) + \lambda,$$

ולכן $\mathbf{V}(X_n) = n\lambda$. כדי לחשב את השונות המשותפת יש לחשב את $\mathbf{E}(X_m|X_n)$, אבל בהנתן X_n, הסדרה $X_n, X_{n+1}, \dots$ מוגדרת כמו הסדרה המקורית (עם X_n בתפקיד λ, ובהזזה של n מקומות). מכאן ש-$\mathbf{E}(X_m|X_n) = X_n$ (וגם $\mathbf{V}(X_m|X_n) = (m-n)X_n$; בזה לא נשתמש בהמשך). כעת $\mathbf{E}(X_n X_m) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n X_m|X_n)) = \mathbf{E}(X_n \mathbf{E}(X_m|X_n)) =$ $\mathbf{E}(X_n^2) = \mathbf{E}(X_n)^2 + \mathbf{V}(X_n) = (n+1)\lambda^2$, ולכן $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = \mathbf{E}(X_n X_m) - \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_m) = n\lambda^2$. הסעיף האחרון נובע מהחישוב הזה לפי ביליניאריות.

4. כמה פעמים, בתוחלת, יש להטיל קוביה הוגנת, עד שהסכום של שתי הטלות רצופות הוא 9 בפעם הראשונה?[2] **פתרון**. אפשר לנסח את הבעיה כתהליך מרקוב בכמה דרכים. הדרך החסכונית היא להתבונן במצבים ∞ (הרגע התקבל סכום השווה ל-9); $?$ (הרגע הוטל $3,4,5$ או 6, שאינו מצטבר ל-9 עם ההטלה הקודמת), ו-0 (אחר). הסתברויות המעבר הן $\Pr\{0|0\} = \frac{1}{3}$, $\Pr\{?|0\} = \frac{2}{3}$; $\Pr\{0|?\} = \frac{1}{3}$, $\Pr\{?|?\} = \frac{1}{2}$, $\Pr\{\infty|?\} = \frac{1}{6}$, כאשר ∞ הוא מצב סופג. אם נסמן ב-e_x את תוחלת זמן ההגעה ל-∞ ממצב x, אז $e_\infty = 0$, והמשוואות הן $e_? = 1 + \frac{1}{3}e_0 + \frac{1}{2}e_?$, $e_0 = 1 + \frac{1}{3}e_0 + \frac{2}{3}e_?$. לכן $e_? = 9$ והתשובה היא $e_0 = \frac{21}{2}$.

מועד ב'.

1. בכפר בן 1000 תושבים, כל אדם מכיר כל אדם אחר בהסתברות $p = 0.005$, כשכל ההיכרויות בלתי תלויות זו בזו.[3]

   (א) מהי, בקירוב, ההתפלגות של המשתנה X הסופר את המכרים של ראש הכפר? מה תוחלת מספר המכרים שלו? מה הסיכוי שהוא אינו מכיר אף אחד?

[1] זו התפלגות פואסון.

[2] לפותרים את השאלה באמצעות תהליך מרקוב: אנא הגדירו באופן ברור את מצבי התהליך.

[3] אבל היכרות היא יחס סימטרי: אם a מכיר את b אז גם b מכיר את a

(ב) נסמן ב־W את מספר האנשים שיש להם מכר משותף עם ראש הכפר[4]. מהי התוחלת ומהי השונות של W? מה הסיכוי ש־$W=0$?[5]

פתרון. ההתפלגות היא $\mathrm{Bin}(1000-1, 0.005)$, ובקירוב $\mathrm{P}(5)$. לכן התוחלת היא 5 והסיכוי ל־$X=0$ הוא e^{-5} (הסיכוי המדוייק הוא $0.995^{999} \approx e^{-5.00753}$, כך שהקירוב משביע רצון).
את W אפשר להציג, בקירוב טוב, כסכום של X משתנים פואסוניים בלתי תלויים עם תוחלת 5 (בדרך זו סופרים את מי שיש לו שני מכרים משותפים פעמיים, וכן הלאה), ואז מקבלים $\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(W|X)) = \mathbf{E}(5X) = 25$, $\mathbf{V}(W) = \mathbf{E}(\mathbf{V}(W|X)) + \mathbf{V}(\mathbf{E}(W|X)) = \mathbf{E}(5X) + \mathbf{V}(5X) = 150$, ו־$\Pr\{W=0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{W=0|X=n\}\Pr\{X=n\} = \sum_n e^{-5n}\frac{e^{-5}5^n}{n!} = e^{-5(1-e^{-5})}$. אפשרות נוספת: מספר המכרים המשותפים של הסנדלר עם ראש הכפר מתפלג $\mathrm{Bin}(998, 0.005^2) \approx \mathrm{P}(1/40)$, ולכן הסיכוי שלא יהיו להם מכרים משותפים הוא בערך $\frac{39}{40} \approx e^{-1/40}$. לפי זה מספר האנשים שיש להם מכר משותף עם ראש העיר מתפלג בערך $\mathrm{P}(1000 \cdot \frac{1}{40}) = \mathrm{P}(25)$; לכן התוחלת היא 25 והשונות גם היא 25. הקירוב השני הרבה פחות מדוייק משום שהשאלה האם לסנדלר מכר משותף עם ראש הכפר והאם לאופה מכר משותף עם ראש הכפר תלויות מאד זו בזו (ובמספר המכרים שיש לראש הכפר).

2. המשתנים הרציפים $T, S \sim U[0,1]$ הם בלתי תלויים.

   (א) מה הסיכוי לכך שלמשוואה $x^2 - Tx + S^2 = 0$ יש שני פתרונות ממשיים?

   (ב) מה הסיכוי לכך שיש בדיוק פתרון ממשי אחד?

   (ג) בהנתן שיש למשוואה פתרון ממשי אחד, מה התוחלת שלו?

פתרון. למשוואה יש שני פתרונות ממשיים אם ורק אם $T^2 > 4S^2$, כלומר $S < \frac{1}{2}T$. הסיכוי לזה הוא $\int_0^1 \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4}$. למשוואה יש פתרון יחיד אם ורק אם $T = 2S$. הסיכוי לזה הוא כמובן אפס. בהנתן המאורע $T = 2S$, הפתרון הוא $x = S$, וכעת יש ל־S התפלגות אחידה בקטע $[0, 1/2]$. לכן תוחלת הפתרון היא $1/4$.

3. $X_1, \dots, X_n$ הם משתנים אקראיים בלתי־תלויים, עם תוחלת 0 ושונות 1. נגדיר $T_n = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \cdots + nX_n$.

   (א) חשבו את התוחלת והשונות של T_n.[6]

   (ב) הוכיחו ש־ $\Pr\{|T_n| \geq n^2\} \longrightarrow 0$ כאשר $n \longrightarrow \infty$.

תמצית הפתרון. את התוחלת והשונות אפשר לחשב ישירות. את החסם מקבלים מאי־שוויון צ'ביצ'ב בדיוק כמו בחוק החלש של המספרים הגדולים.

1. נמלה משוטטת בין קודקודי משולש, כשבכל דקה היא או מתה מתשישות, בהסתברות $p > 0$, או עוברת לאחד משני הקודקודים האחרים בהסתברויות שוות, $q/2$ לכל קודקוד (כך $q = 1 - p$). מניחים אותה בקודקוד A. מה ההסתברות לכך שהיא תסיים את חייה בקודקוד B?[7] **תמצית הפתרון**. זה תהליך מרקוב עם ארבעה מצבים (שלושה קודקודי המשולש, והמצב "מת"). סמני ב־x, y, z את הסיכוי למות בסופו של דבר בקודקוד B בהנתן שכרגע אנחנו בקודקוד A, B, C, וכתוב משוואות על x, y, z.

[4] ראש הכפר עצמו אינו נספר לצורך זה.
[5] הערכה טובה תספיק כאן.
[6] נוסחת עזר: $\sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3}$.
[7] אם תחליטו להטיל לבעיה משתני עזר, עליכם להגדיר אותם במדויק.

5. בחנות ההפתעות נמכר כל מוצר חלב במחיר אקראי, בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת 7 ש"ח וסטיית תקן 3 ש"ח.

(א) מה אחוז המוצרים שמחירם שלילי?

(ב) איך מתפלג מחירו של סל בן עשרים מוצרים? בכמה סלים כאלה יש לפחות מוצר אחד שמחירו שלילי?

(ג) לאחר שהוסר הפיקוח על המחירים, יצא תחקירן חרוץ להוכיח שהחנות העלתה את תוחלת המחיר. הוא קנה סל שמחירו הכולל 6300 ש"ח. כמה מוצרים יש בסל, לפחות, אם הוא מאפשר להוכיח את הטענה ברמת מובהקות של 99%?

תמצית הפתרון. בסעיף הראשון יש לנרמל ולשלוף את ההסתברות מהטבלה של התפלגות נורמלית. מחיר הסל הוא סכום של 02 משתנים נורמליים, ולכן גם הוא נורמלי (עם תוחלת ושונות השווֹת לפי 02 מהתוחלת והשונות של כל מוצר). אחוז הסלים שאין בהם מוצר שלילי מגיע מהעלאת ההסתברות לכך שהמוצר חיובי (מסעיף א') בחזקת 02. בסעיף ג' כתוב משוואה על מספר המוצרים בסל.