

## מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה

סמסטר ב', מועד ב', תשע"א

יש לענות על כל השאלות. השאלה הטובה ביותר שווה 30 נקודות, והחלשה ביותר - 10; השאר שוות 20 נקודות כל אחת.

משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: הכל למעט ספרים. אנא הקיפו במסגרת תשובות סופיות.

1. בכפר בן 1000 תושבים, כל אדם מכיר כל אדם אחר בהסתברות  $p = 0.005$ , כשכל ההיכרויות בלתי תלויות זו בזו.<sup>1</sup>

(א) מהי, בקירוב, ההתפלגות של המשתנה  $X$  הסופר את המכרים של ראש הכפר? מה תוחלת מספר המכרים שלו? מה הסיכוי שהוא אינו מכיר אף אחד?

(ב) נסמן ב- $W$  את מספר האנשים שיש להם מכר משותף עם ראש הכפר.<sup>2</sup> מהי התוחלת ומהי השונות של  $W$ ? מה הסיכוי ש- $W = 0$ ?<sup>3</sup>

2. המשתנים הרציפים  $T, S \sim U[0, 1]$  הם בלתי תלויים.

(א) מה הסיכוי לכך שלמשוואה  $x^2 - Tx + S^2 = 0$  יש שני פתרונות ממשיים?

(ב) מה הסיכוי לכך שיש בדיוק פתרון ממשי אחד?

(ג) בהנתן שיש למשוואה פתרון ממשי אחד, מה התוחלת שלו?

3.  $X_1, \dots, X_n$  הם משתנים אקראיים בלתי-תלויים, עם תוחלת 0 ושונות 1. נגדיר  $T_n = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \dots + nX_n$ .

(א) חשבו את התוחלת והשונות של  $T_n$ .<sup>4</sup>

(ב) הוכיחו ש- $\Pr\{|T_n| \geq n^2\} \rightarrow 0$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

4. נמלה משוטטת בין קודקודי משולש, כשבכל דקה היא או מתה מתשישות, בהסתברות  $p > 0$ , או עוברת לאחד משני הקודקודים האחרים בהסתברויות שוות,  $q/2$  לכל קודקוד (כך  $q = 1 - p$ ). מניחים אותה בקודקוד  $A$ . מה ההסתברות לכך שהיא תסיים את חייה בקודקוד  $B$ ?<sup>5</sup>

5. בחנות ההפתעות נמכר כל מוצר חלב במחיר אקראי, בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת 7 ש"ח וסטיית תקן 3 ש"ח.

(א) מה אחוז המוצרים שמחירים שלילי?

(ב) איך מתפלג מחירו של סל בן עשרים מוצרים? בכמה סלים כאלה יש לפחות מוצר אחד שמחירו שלילי?

(ג) לאחר שהוסר הפיקוח על המחירים, יצא תחקירן חרוץ להוכיח שהחנות העלתה את תוחלת המחיר. הוא קנה סל שמחירו הכולל 6300 ש"ח. כמה מוצרים יש בסל, לפחות, אם הוא מאפשר להוכיח את הטענה ברמת מובהקות של 99%?

### בהצלחה.

<sup>1</sup>אבל היכרות היא יחס סימטרי: אם  $a$  מכיר את  $b$  אז גם  $b$  מכיר את  $a$ .

<sup>2</sup>ראש הכפר עצמו אינו נספר לצורך זה.

<sup>3</sup>הערכה טובה תספיק כאן.

<sup>4</sup>נוסחת עזר:  $\sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3}$ .

<sup>5</sup>אם תחליטו להטיל לבעיה משתני עזר, עליכם להגדיר אותם במדויק.