מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88־165

פרופ' ע. וישנה

מועדים א' וב' - **פתרון** לכמה שאלות, תשע"ב

מועד א'.

2. במשולש שווה־צלעות שאורך הצלע שלו 1, מגרילים נקודה בהתפלגות אחידה. מה הסיכוי שהיא נמצאת במרחק $\sqrt{3}/18$ או פחות מאחת הצלעות?

פתרון. פתרון אפשרי ראשון: מקם את המשולש במערכת הצירים. הגדר זוג משתנים רציפים, (X,Y), שההתפלגות המשותפת שלהם היא ההתפלגות האחידה על המשולש. חשב את הסיכוי למאורע על־ידי אינטגרציה על־פני תחום מתאים מתאים.

פתרון שני: מכיוון שהנקודה נבחרת לפי התפלגות אחידה, הסיכוי שהיא תיפול בתחום מסויים (המוכל במשולש) שווה ליחס בין שטחו של התחום הזה לשטח המשולש כולו. נסמן ב־O את הנקודה שבמרכז המשולש. גובה המשולש הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$. מרחקה של O מכל קודקוד הוא $\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$, ומרחקה מהצלעות הוא $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (משום שכידוע התיכונים מחלקים זה את זה ביחס של $2:1$). נעביר במשולש, עבור כל צלע, את הישר המקביל לה ונמצא במרחק של $\frac{\sqrt{3}}{18}$ ממנה לכיוון המרכז. כך מתקבל משולש, שמרחקה של O מן הצלעות שלו הוא $\frac{\sqrt{3}}{9}$, לכומר $\frac{2}{3}$ מן המרחק של O מצלעות המשולש המקורי. מכאן ששטח המשולש הקטן הוא $\frac{4}{9}$ מזה של המשולש המקורי. נקודה נמצאת במרחק של $\frac{\sqrt{3}}{18}$ מאחת הצלעות אם ורק אם היא מחוץ למשולש הקטן, וזה קורה בסיכוי $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

5. מוזיקאי מנגן סדרת שירים ארוכה, משני סוגים: שמחים ועצובים. במהלך הנגינה הוא מתבונן בקהל: אם הקהל מרוצה, השיר הבא יהיה מאותו סוג. אם הקהל לא מרוצה, השיר הבא יהיה מאותו סוג רק בסיכוי $2/5$ (ומהסוג המנוגד בסיכוי $3/5$). הסיכוי שהקהל יהיה מרוצה משיר הוא $1/2$ כשהשיר עצוב, ו־$3/4$ כשהשיר שמח.

איזה חלק מהשירים יהיו שמחים? איזה חלק מהזמן יהיה הקהל מרוצה?

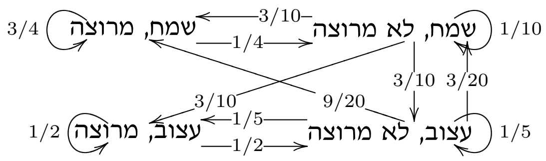
פתרון. המוזיקאי שולט בסוג השירים, והקהל בוחר אם להיות מרוצה או לא. כלומר, בדיאגרמות להלן, המוזיקאי בוחר את השורה, והקהל קובע את העמודה (בהסתברויות התלויות בשורה). אם השיר הנוכחי שמח והקהל מרוצה, אז השיר הבא יהיה שמח, והקהל יהיה מרוצה בסיכוי $3/4$; לכן החיצים בשורה העליונה. באותו אופן מחשבים את ההסתברויות בשורה התחתונה.

שמח, לא מרוצה $\xleftarrow{1/4}$ שמח, מרוצה $3/4$

עצוב, לא מרוצה $\xleftarrow{1/2}$ עצוב, מרוצה $1/2$

לעומת זאת אם השיר שמח והקהל לא מרוצה, השיר הבא יהיה שמח בסיכוי $2/5$ ועצוב בסיכוי $3/5$; הסיכויים שהקהל יהיה מרוצה קובעים את ההסתברויות לעבור לכל מצב כמו במקרה הקודם: כשההסתברויות נכנסות לשורה העצובה הן מתחלקות

באופן שווה, וכשהן נכנסות לשורה השמחה הן מתחלקות ביחס $3 : 1$.



נסמן ב־ $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ את ההסתברויות הסטציונריות, בהתאמה (כלומר, a הוא הסיכוי ששיר שמנגנים בעתיד הרחוק יהיה שמח ויביא לקהל מרוצה, וכן הלאה). עלינו לפתור את המשוואה $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, כאשר A היא מטריצת המעבר של התהליך. המשוואות הן:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3}{4}a + \frac{3}{10}b + \frac{1}{2}c + \frac{9}{20}d \\
b &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{10}b + \frac{1}{2}c + \frac{3}{20}d \\
c &= \frac{3}{10}b + \frac{1}{5}d \\
d &= \frac{3}{10}b + \frac{1}{5}d
\end{aligned}$$

ומיד רואים ש־$d = c$ ולכן $c = \frac{3}{8}b$ ו־$a = \frac{21}{8}b$. מכיוון ש־$a+b+c+d = 1$, מקבלים $b = \frac{8}{35}$. ההסתברויות הן ביחס של $a : b : c : d = 21 : 8 : 3 : 3$. יחס השירים השמחים הוא $a + b = \frac{29}{35}$. הקהל מרוצה $a + c = \frac{24}{35}$ מהזמן.

מועד ב'.

2. בכל אחד משני קנקנים יש ליטר אחד של מים. מעבירים כמות אקראית X (בהתפלגות אחידה) מהקנקן הראשון לשני, ואז מחזירים כמות אקראית Y (בהתפלגות אחידה) מהקנקן השני לראשון. כתוב את פונקציית הצפיפות של כמות המים בקנקן הראשון, $1-X+Y$, לאחר שתי ההעברות. [הצעה: חשב את ההסתברות $P(1-X+Y < a)$, ראשית כאשר $a > 1$ ואחר־כך כאשר $0 < a < 1$.]

פתרון. לפי הנתונים, $X \sim U[0,1]$ ו־$Y|X \sim U[0, 1+X]$. בפרט, תמיד $0 < Y < 1+X$. נניח ש־$1 < a < 2$. אז

$$\begin{aligned}
P(1-X+Y<a) &= P(Y < X + (a-1)) \\
&= \int_0^1 P(Y < X + a - 1 | X = x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{x+a-1}{x+1}dx \\
&= \int_0^1 (1 - \frac{2-a}{x+1})dx = 1 - (2-a)\log(2);
\end{aligned}$$

ואילו כאשר $0 < a < 1$,

$$\begin{aligned} P(1-X+Y<a) &= P(Y<X-(1-a)) \\ &= \int_{1-a}^{1} P(Y<X+a-1|X=x)dx \\ &= \int_{1-a}^{1} \frac{x+a-1}{x+1}dx \\ &= \int_{1-a}^{1} (1-\frac{2-a}{x+1})dx = a-(2-a)(\log(2)-\log(2-a)). \end{aligned}$$

חישבנו את ההתפלגות של $W=1-X+Y$, והנגזרת תתן את פונקציית הצפיפות:
$f_W(a) = \begin{cases} \log(\frac{2}{2-a}) & a<1 \\ \log(2) & 1<a<2 \end{cases}$.

3. שני חתולים מתחרים בציד עכברים. הראשון צד כבר 1200 עכברים, והוא מוסיף לצוד שניים מדי יום. השני חדש בשכונה, והוא צד מדי יום מספר עכברים כפי שמורה לו קוביה הוגנת (המקבלת ערכים בטווח $1,\dots,6$).

   (א) הוכח שבהסתברות 1, החתול השני ישיג את הראשון בסופו של דבר.

   (ב) נסה להעריך כמה ימים יידרשו לכך.[1]

   (ג) מה הסיכוי שאחרי 900 ימים, החתול השני צד (בסך הכל) יותר עכברים מן הראשון?

פתרון. עד היום ה־n, החתול הראשון צד $1200+2n$ עכברים, ואילו השני צד $S=X_1+\dots+X_n$ כאשר $X_i \sim U[1,6]$ הוא מספר העכברים שהשני צד מדי יום. למשתנה S יש תוחלת $\frac{7}{2}n$ ושונות $\frac{35}{12}n$, ולפי אי־שוויון צ'ביצ'ב

$$\begin{aligned} \Pr\{S \le 1200+2n\} &= \Pr\left\{S-\frac{7}{2}n \le 1200-\frac{3}{2}n\right\} \\ &= \Pr\left\{\frac{S-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} \le \frac{1200-\frac{3}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right\} \end{aligned}$$

וכאשר $1200-\frac{3}{2}n<0$ זה מקיים

$$\begin{aligned} &\le \Pr\left\{\left|\frac{S-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right| \ge \frac{\frac{3}{2}n-1200}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right\} \\ &\le \frac{\frac{35}{12}n}{(\frac{3}{2}n-1200)^2}. \end{aligned}$$

ההסתברות שהשני לא ישיג את הראשון שואפת, אם כך, לאפס.

[1] ניקוד מלא ינתן לנימוק מתקבל על הדעת, ללא קשר לאיכות התוצאה.

כסכום של משתנים רבים בעלי אותה התפלגות, (כאשר n גדול מספיק), $\frac{S-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} \sim N(0,1)$, ולכן הסיכוי של הערך הזה להיות אפס הוא בקירוב $\frac{1}{2}$. כלומר, כאשר $n = 800$ (אז $1200 - \frac{3}{2}n = 0$), הסיכוי של החתול השני להשיג את הראשון קרוב לחצי.

עבור $n = 900$, $1200 - \frac{3}{2}n = -150$ ולכן

$$\Pr\{S > 1200 + 2n\} = \Pr\left\{\frac{S - \frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} > -10\sqrt{\frac{3}{35}} \approx -2.92\right\} \approx 0.9982.$$