

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה
מועד א', תשע"ב

יש לענות על כל השאלות. השאלה הטובה ביותר שווה 30 נקודות, והחלשה ביותר - 10; השאר שוות 20 נקודות כל אחת. משך המבחן: שלוש שעות (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: הכל למעט ספרים.

1. מספר הטעויות, X , שמועמד עושה בנאום הבחירות שלו, מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. הסיכוי שהוא ייבחר, אם עשה n טעויות, הוא $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(א) מה הסיכוי שהמועמד ייבחר? ⁽¹⁾

(ב) נניח שהמועמד נבחר בסופו של דבר. מה ההתפלגות של X ? ⁽²⁾

2. במשולש שווה-צלעות שאורך הצלע שלו 1, מגרילים נקודה בהתפלגות אחידה. מה הסיכוי שהיא נמצאת במרחק $\sqrt{3}/18$ או פחות מאחת הצלעות?

3. המשתנים X_1, X_2, \dots בלתי תלויים, בעלי תוחלת $E(X_i) = 0$ ושונות $V(X_i) = 1$. נסמן $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

(א) מהו $\sup \{ \alpha \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P(n^\alpha |Y_n| < 1) = 1 \}$?

(ב) הוכח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n^{0.9} |Y_n - Y_{n-1}| < 1) = 1$.

4. משקלה של ככר לחם תקנית מתפלג נורמלית עם תוחלת 750 גרם וסטיית תקן 80 גרם. בביקורת מחושב המשקל הממוצע של מאה ככרות, והמאפיה נפסלת אם הממוצע קטן מ-745.

(א) מה הסיכוי לפסול במבחן כזה מאפיה המייצרת ככרות לפי התקן?

(ב) בכמה צריך בעל המאפיה להגדיל כל ככר כדי להוריד את הסיכוי לפסילה ל-1%?

5. מוזיקאי מנגן סדרת שירים ארוכה, משני סוגים: שמחים ועצובים. במהלך הנגינה הוא מתבונן בקהל: אם הקהל מרוצה, השיר הבא יהיה מאותו סוג. אם הקהל לא מרוצה, השיר הבא יהיה מאותו סוג רק בסיכוי $2/5$ (ומהסוג המנוגד בסיכוי $3/5$). הסיכוי שהקהל יהיה מרוצה משיר הוא $1/2$ כשהשיר עצוב, ו- $3/4$ כשהשיר שמח. איזה חלק מהשירים יהיו שמחים? איזה חלק מהזמן יהיה הקהל מרוצה?

בהצלחה.

¹תנו מספר.
²כלומר, לכל n , מה הסיכוי ש- $X = n$?