מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה

מועד א' - **פתרון**, תשע"ג

1. בטקס חלוקת תארים מקבל כל סטודנט תואר מהפקולטה למדעי החברה (בסיכוי $2/3$) או מהפקולטה למדעי הרוח (בסיכוי $1/3$). בכל פעם שניגש סטודנט לבמה, מעביר מנהל הטקס את התעודה שלו לדיקן הפקולטה. ברגע שמגיע סטודנט מן הפקולטה האחרת, הדיקן מנצל את ההפוגה ומחלק בזריזות את X התעודות שצבר. חשב את התוחלת ואת השונות של X (אתה רשאי גם לכתוב דברים נכונים על ההתפלגות של X).

פתרון. נסמן ב־Y_1 את מספר התעודות שחילק בפעם האחרונה דיקן מדעי החברה, וב־Y_2 את מספר התעודות שחילק בפעם האחרונה דיקן מדעי הרוח. לפי הנתונים, $Y_1 \sim \mathrm{G}(1/3)$ משום שרצף סטודנטים ממדעי החברה נקטע בסיכוי $1/3$, ובאופן דומה $Y_2 \sim \mathrm{G}(2/3)$. נסמן ב־W את סוג התעודות שחולקו בפעם האחרונה (מספרן הוא X המוזכר בשאלה). כלומר, $W = 1, 2$, עם $\Pr\{W = 1\} = 2/3$. שימו לב ש־$X = Y_W$, כלומר $X = Y_1$ אם $W = 1$ ו־$X = Y_2$ אם $W = 2$. במלים אחרות ההתפלגות של X היא ממוצע משוקלל של שתי התפלגויות גאומטריות. כעת,

$$\mathbf{E}(X|W = 1) = \mathbf{E}(Y_1) = 3$$

ו־

$$\mathbf{E}(X|W = 2) = \mathbf{E}(Y_2) = 3/2,$$

כך ש־

$$\mathbf{E}(X|W) = 3/W$$

(יש כמובן נוסחאות אחרות המביאות לאותה תוצאה). בדומה לזה

$$\mathbf{V}(X|W = 1) = \mathbf{V}(Y_1) = 6$$

ו־

$$\mathbf{V}(X|W = 2) = \mathbf{V}(Y_1) = 3/4,$$

כך ש־$\mathbf{V}(X|W) = 6/W^3$. ועכשיו:

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|W)) = \mathbf{E}(3/W) = \frac{1}{3}\frac{3}{1} + \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 2,$$

ו־

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(\mathbf{E}(X|W)) + \mathbf{E}(\mathbf{V}(X|W)) = \mathbf{V}(3/W) + \mathbf{E}(6/W^3) = (\frac{1}{3}\frac{9}{1} + \frac{2}{3}\frac{9}{4} - 2^2) + \frac{1}{3}\frac{6}{1} + \frac{2}{3}\frac{6}{8} = \frac{11}{4}.$$

2. היקפה של הכנרת הוא 60 ק"מ. כשבוחרים אתר שבו יוקם פארק שעשועים חדש, עושים זאת על־ידי נעיצת סיכה על־פי התפלגות אחידה לאורך ההיקף. מקימים שלושה פארקים (נקודתיים ובלתי תלויים). מה הסיכוי שהמרחק בין כל שניים מהם (לאורך הכביש ההיקפי) אינו עולה על 5 ק"מ?

פתרון. נסמן ב־0 את מיקומו של הפארק הראשון. כדי שהמאורע שלנו יתרחש, על כל אחד משני הפארקים האחרים להיות במרחק של עד 5 ק"מ מנקודה זו, אירוע שהסיכויים לו הם $\left(\frac{10}{60}\right)^2 = \frac{1}{36}$. נסמן את המיקומים היחסיים שלהם ב־X,Y, ונניח שהם במרחק שאינו עולה על 5 מן הפארק הראשון, כך שההתפלגות המשותפת של (X,Y) היא אחידה בריבוע $[-5,5]\times[-5,5]$. בריבוע זה, המאורע $|X-Y|<5$ פוסל שני משולשים פינתיים שאורך צלעו של כל אחד מהם הוא 5, ושטחם היחסי המשותף הוא $1/4$ משטח הריבוע. לכן ההסתברות הכוללת היא $\frac{1}{48} = \frac{1}{36}\frac{3}{4}$.

3. נניח ש־$X_i \sim U[0,e]$ הם משתנים מקריים רציפים, בלתי תלויים, בעלי התפלגות אחידה בקטע שצויין (e הוא בסיס הלוגריתם הטבעי).

(א) תאר את ההתפלגות של $Y_i = \log(X_i)$ (הלוגריתם, כמובן, בבסיס e); רצוי על־ידי פונקציית הצפיפות f_{Y_i}.

(ב) חשב את התוחלת והשונות $\mathbf{E}(Y_i)$, $\mathbf{V}(Y_i)$.

(ג) מצא מספר a כך ש־$\Pr\left\{\prod_{i=1}^{100} X_i > a\right\} = 0.95$.

פתרון. טווח הערכים של Y_i הוא $(-\infty,1)$. לכל t בטווח הזה, $F_{Y_i}(t) = \Pr\{Y_i \leq t\} = \Pr\{\log(X_i) \leq t\} = \Pr\{X_i \leq e^t\} = e^{t-1}$. נגזור ונקבל את הצפיפות $f_{Y_i}(t) = e^{t-1}$. כלומר, $1-Y_i \sim \mathrm{Exp}(1)$. מכאן נובע מיד ש־$\mathbf{E}(Y_i) = 1-1 = 0$ ו־$\mathbf{V}(Y_i) = 1$. כדי למצוא את a נבחין ש־$\Pr\left\{\prod_{i=1}^{100} X_i > a\right\} = \Pr\left\{\sum_{i=1}^{100} Y_i > \log(a)\right\}$. נסמן $S = \sum_{i=1}^{100} Y_i$, אז לפי משפט הגבול המרכזי, בקירוב מצויין, $\frac{S-0}{10} \sim N(0,1)$. עלינו למצוא a כך ש־$\Pr\left\{\frac{S}{10} > \frac{\log(a)}{10}\right\} = \Pr\{S > \log(a)\} = 0.95$, ולשם כך צריך $\frac{\log(a)}{10} = 1.645$ כלומר $a = e^{16.45}$.

4. הציונים בבחינה מתפלגים נורמלית, $N(\mu,\sigma^2)$. חמישה תלמידים קיבלו את הציונים 86, 88, 90, 92, 94. כתוב רווח סמך לתוחלת μ, בהנחה שהשונות אינה ידועה. האם יש די ראיות כדי לדחות את ההשערה שהתוחלת היא 85, ברמת מובהקות של 1%?

פתרון. לפי הנתונים, $\bar{X} = \frac{86+88+90+92+94}{5} = 90$ ו־$S^2 = \frac{1}{4}\sum(X_i-90)^2 = \frac{40}{4} = 10$. כידוע $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{5}} \sim N(0,1)$ ו־$\frac{4S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_4$ הם בלתי תלויים, ולכן $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{5}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \sim t_4$. לפי הטבלה, $t_{4,0.995} = 4.604$, כלומר $\Pr\{|\mu-90| \leq 6.511\} = \Pr\left\{\left|\frac{90-\mu}{\sqrt{10/5}}\right| \leq 4.604\right\} = 0.99$, ולכן הרווח הוא $(90-6.511, 90+6.511)$. מכיוון ש־85 שייך לרווח הזה, אי אפשר לדחות את ההשערה $H_0 : \mu = 85$ ברמת מובהקות של $\alpha = 1\%$.

5. בכל הטלה של מטבע (הוגן), מעתיקים את המספר הכתוב על הלוח הראשון (אם יש כזה) ללוח השני, ואז כותבים את הערך שהתקבל במטבע אל הלוח הראשון. (בתחילת המשחק שני הלוחות מחוקים).

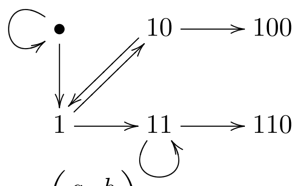
(א) המשחק נעצר כאשר, בהטלת המטבע, מתקבל ערך שונה מן המספר הכתוב על הלוח השני. איך מתפלג מספר ההטלות עד לעצירת המשחק?

(ב) קובעים כללי עצירה חדשים: המשחק ייעצר רק כאשר המטבע מוטל על 0 בשעה שהלוח מציג 1. מה תוחלת מספר הטלות המטבע במקרה זה?

פתרון.

i. בזמן ההטלה הראשונה אין עדיין אף מספר על הלוחות. בזמן ההטלה השניה אין מספר בלוח השני. מן ההטלה השלישית ואילך, הסיכוי לעצור את המשחק הוא $\frac{1}{2}$ בכל הטלה, ולכן מספר המטבעות שיוטלו עד לעצירה הוא $2+X$ כאשר $X \sim \mathrm{G}(1/2)$ (בפרט התוחלת היא 4).

ii. נגדיר תהליך מרקוב על המצבים הבאים, המתארים את הסטוריית הטלות הקוביה (ההטלה החדשה ביותר מימין):



שני המצבים הימניים סופגים. נסמן ב־$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ את המשתנים האחרים, בהתאמה, אז

$$a = 1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c; \qquad b = 1 + \frac{1}{2}c;$$

$$c = 1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d; \qquad d = 1 + \frac{1}{2}d.$$

פתרון המשוואות הוא

$$a = 16/3; \qquad b = 8/3; \qquad c = 10/3; \qquad d = 2,$$

ומכיוון שמתחילים במצב השמאלי־עליון, התוחלת היא $16/3$.