

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה
מועד א', תשע"ז

יש לענות על כל השאלות. משקל השאלות יהיה 10, 30, 30, 30, מן הטובה לפחות טובה. אין לענות על סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. יש להקיף במסגרת את התשובות הסופיות (כל המחברת תבדק). משך המבחן: שעתיים וחצי. חומר מותר בשימוש: אין.

1. שוברים מקל באורך מטר אחד בנקודה אקראית (הנבחרת בהתפלגות אחידה). אחר-כך חוזרים על אותו תהליך בכל אחד משני החלקים שהתקבלו. נסמן ב- A, B, C, D את אורכי החלקים שהתקבלו באופן הזה.

(א) האם מקדם המתאם בין A ל- D חיובי או שלילי? הסבר (אין צורך לחשב).

(ב) מצא את מקדם המתאם $\rho(A, B) = \frac{\text{Cov}(A, B)}{\sqrt{V(A)V(B)}}$ (שימו לב: B ו- D נגזרים).

(ג) מצא את התוחלת של המכפלה $ABCD$.

2. מגדירים סדרת משתנים מקיים באופן הבא. $X_0 = 0$, ולכל $n, 1 \leq n$ הוא מספר ההצלחות ב- $X_{n-1} + 1$ ניסויי ברנולי בלתי תלויים, בעלי הסתברות p .

(א) מה ההסתברות למאורע $X_2 = 0$?

(ב) חשבו את התוחלת של X_n (כפונקציה מפורשת של n ושל p).

(ג) חשבו את הגבול $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$ (כפונקציה של p).

(ד) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_n)$.

(ה) מה הסיכוי למאורע $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \ell$ (כאשר ℓ הוא הגבול מסעיף ג')? נמק.

3. מטילים קוביה הוגנת בת ארבעה צדדים, המסומנים בספרות 1, 2, 3, 4, עד שמתקבל ערך הגדול ממש מקודמו. מה תוחלת מספר ההטלות?

4. מחשבים רווח סמך לתוחלת של התפלגות נורמלית, על פי הממוצע \bar{X} של מדגם בגודל n , והשוונות הידועה של σ^2 של האוכלוסייה. פי כמה מתארך רווח הסמך אם:

(א) גודל המדגם עולה מ-50 ל-200.

(ב) הממוצע גדל מ-15 ל-60.

(ג) סטיית התקן σ גדלה מ-10 ל-40.

(ד) רמת המובהקות עולה מ-95% ל-99%.

נמק בקצרה בכל אחד מהמקרים.

בהצלחה.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

הצעות: חשבו במפורש את $E(X_n)$ עבור $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ונחשו את הנוסחה הכללית; או הציבו $E(X_n) =$

$$\frac{p - e_n}{1 - p}$$

הדרכה: מצא נוסחת רקורסיה ל- $V(X_n)$, ומצא את הגבול בהנחה שהוא קיים.