מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

בוחן - הערות ופתרונות, סמסטר א׳ , תשע״א
פרופ׳ עוזי וישנה

1. ״מחלקת צנחנים - 20 חיילים ומפקד - יוצאת למסע. הסיכוי של כל חייל לסיים את המסלול הוא $p = 0.8$; המפקד המנוסה יסיים את המסלול בוודאות. בסיום המסלול יכין לכולם קפה אחד הנוכחים, שייבחר באקראי. מה הסיכוי שהמפקד הוא זה שיכין את הקפה?״

פתרון. נסמן ב־A את המאורע 'המפקד מכין את הקפה'. מה הסיכוי של A? תלוי כמובן במספר החיילים שסיימו את המסלול, שאינו קבוע. נסמן, אם כך, ב־X את מספר החיילים (למעט המפקד) שסיימו את המסלול. זהו משתנה מקרי, וההתפלגות היא $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ כאשר $n = 20$ ו־$p = 0.8$ **[מדוע?]**. ההסתברות של A בהנתן $X = k$ היא $P(A|X = k) = \frac{1}{1+k}$; אפשר גם לכתוב, בקיצור, $P(A|X) = \frac{1}{1+X}$.

בשלב הזה מפתה לחתום ב־״ההסתברות היא $\frac{1}{1+k}$ כאשר k הוא מספר החיילים שסיימו את המסלול״, אלא שזו לא תשובה: המספר k אינו מופיע בשאלה. מבקשים שניתן מספר, ולא רשימה של אפשרויות (״אם סיימו את המסלול 11 חיילים, ההסתברות היא $\frac{1}{12}$; אם סיימו 12, אז $\frac{1}{13}$...״)

באותה מידה שגויה התשובה ״מכיון ש־$E(X) = np = 16$, הסיכוי הוא $\frac{1}{17} = \frac{1}{E(X)+1}$״. נכון שתוחלת מספר החיילים שסיימו את המסלול היא np, אבל זו אינה התוצאה ההכרחית של המסע. הסיכוי לקבל דווקא $X = \mathbf{E}(X)$ אינו גדול במיוחד.

נותר, אם־כן, להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{n} P(A|X = k)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \end{aligned}$$

כאשר $q = 1 - p$. הסכום הזה אולי אינו נראה מוכר ממבט ראשון, אבל אל יאוש: אם נפענח את המקדם הבינומי, נמצא שם

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

והצעד $(k+1)! = (k+1)k!$ ממש מתבקש. משם ההמשך צפוי:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} p^{(k+1)-1} q^{(n+1)-(k+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^{(k+1)} q^{(n+1)-(k+1)} \end{aligned}$$

ואם נציב $i = k+1$ נקבל

$$\frac{1}{(n+1)p} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i q^{(n+1)-i},$$

שהוא הסכום המוכר מנוסחת הבינום - למעט מלכודת אחת קטנה בגבולות הסיכום: המקרה $i=0$ חסר. מכיוון ש־ $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i q^{(n+1)-i} = 1$, אנו מקבלים את הפתרון

$$P(A) = \frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}.$$

2. יהיו X, Y, Z משתנים מקריים. נאמר ש־Z **מפריד** את X ו־Y אם לכל ערך c של Z, המשתנים המקריים המותנים $X|Z=c$ ו־$Y|Z=c$ הם בלתי תלויים. הוכיחו: אם Z מפריד את X ו־Y, והמשתנים X ו־Z בלתי תלויים, אז X ו־Y בלתי תלויים.

הערה. זוהי שאלה על משתנים מקריים. משתנים מקריים אינם מאורעות. אם X משתנה מקרי, אז $X=a$ הוא מאורע, ואם A מאורע אז המשתנה המציין, המוגדר לפי $X_A(\omega)=1$ אם ורק אם $\omega \in A$, הוא משתנה מקרי. עם זאת, אם X, Y משתנים מקריים, אין משמעות לביטויים כמו $P(X)$ או $P(X \cap Y)$ ("ההסתברות שהערך שמראה הקוביה"? "ההסתברות שמספר ההצלחות וגם תוצאת המטבע"?). גרוע מזה, אין משמעות לביטוי $P(X|Z=c \bigm| Y|Z=c)$: "ההסתברות ש־X בהנתן $Z=c$, בהנתן ש־Y בהנתן $Z=c$"? פסול גם $P(X|Z=c, Y|Z=c)$ (אם ידוע ש־$Z=c$, זה ידוע לרוחב החזית. יש לכתוב $P(X,Y|Z=c)$, אם מדובר היה במאורעות כמובן). דוגמא נוספת: $P((X=a|Y=b)|Z=c)$. הנסיון לבנות הירכיה של נתונים ראוי לשבח, אבל רצוי לכתוב פשוט $P(X=a|Y=b, Z=c)$.

הסתברות יש רק לדבר אחד: למאורע. אפשר לכתוב $P(A)$ כאשר A הוא מאורע, או $P(X=a)$ כאשר X הוא משתנה מקרי (משום ש־$X=a$ הוא בעצמו מאורע, $\{\omega \in \Omega :\ X(\omega)=a\}$). כשמדובר בהסתברות מותנית, אפשר לכתוב $P(A|B)$ כקיצור ליחס $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, או $P(A|X=a)$ (כנ"ל), וכמקרה חריג, גם $P(A|X)$, בתנאי שבמקרה זה ברור שהתוצאה היא פונקציה של X (ולכן היא משתנה מקרי). כדי להתנות בשני מאורעות ("A בהנתן B וגם C") כותבים $P(A|B,C)$ או $P(A|B\cap C)$, ולעולם לא $P(A|B|C)$.

פתרון. נזכיר לעצמנו שהמשתנים המקריים X, Y בלתי תלויים אם לכל a ולכל b,

$$P(X=a, Y=b) = P(X=a)P(Y=b).$$

לכן משמעות הנתון "Z מפריד את X ו־Y" היא שלכל a, b, c,

$$P(X = a, Y = b|Z = c) = P(X = a|Z = c)P(Y = b|Z = c)$$

(ולא "$P(X \cap Y|Z = c) = P(X|Z = c)P(Y|Z = c)$"! מאורעות (שאינם אלא קבוצות) אפשר לחתוך, אבל לא משתנים מקריים. גם לא "נתון ש־$P(X|Z = c)$ ו־$P(Y|Z = c)$ בלתי תלויים". הסתברויות הן מספרים, ומספרים אינם יכולים להיות תלויים או בלתי תלויים.)

כדי להוכיח את הטענה המבוקשת, עלינו לחשב (לכל שני מספרים a, b):

$$P(X = a, Y = b) =$$

השאלה אינה מספקת אף נתון ישיר על הקשר בין X ו־Y, אבל נוכחותו של Z שולחת אותנו להפעיל את נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(X = a, Y = b) = \sum_c P(X = a, Y = b|Z = c)P(Z = c),$$

ועל הביטוי משמאל אנחנו יודעים משהו; לכן זהו

$$= \sum_c P(X = a|Z = c)P(Y = b|Z = c)P(Z = c);$$

נתון נוסף - X ו־Z בלתי תלויים, ולכן הסכום הזה הוא

$$= \sum_c P(X = a)P(Y = b|Z = c)P(Z = c);$$

מכיוון שמסכמים כאן על c, אפשר להוציא מחוץ לסוגריים:

$$= P(X = a) \sum_c P(Y = b|Z = c)P(Z = c);$$

ולקנח בנוסחת ההסתברות השלמה (בכיוון הסוגר):

$$= P(X = a)P(Y = b).$$

3. יואב וחנן מתחרים בקליעות לסל. הם זורקים את הכדור לסירוגין ־ קודם חנן, ואז יואב. חנן קולע בסיכוי $\alpha = 0.4$, ויואב בסיכוי $\beta = 0.7$. כל קליעה מזכה את הקולע בנקודה.

(א) מהי ההסתברות לכך ששתי הנקודות הראשונות במשחק תושגנה ברצף?

(ב) המשחק נעצר כשחנן קולע בפעם הראשונה. מה תוחלת מספר הנקודות של יואב באותו זמן? ומהי השונות?

פתרון. השאלה אמנם אינה דורשת זאת במפורש, אבל תמיד נוח להצטייד בכמה משתנים מקריים מוגדרים כראוי. נסמן ב־X את מספר הזריקות של חנן עד לקליעה הראשונה, וב־Y את מספר הזריקות של יואב עד לקליעה הראשונה. מכיוון שמדובר בסדרת נסיונות בלתי תלויים, $X \sim \mathrm{G}(\alpha)$ ו־$Y \sim \mathrm{G}(\beta)$, כאשר $\alpha = 0.4$ ו־$\beta = 0.7$.

בסעיף (א) שואלים מה ההסתברות לכך ששתי הנקודות הראשונות תושגנה ברצף. כלומר, לאחר סדרת כשלונות (של שני השחקנים, לסירוגין), אחד מהם קולע, ואחריו קולע מיד השחקן השני. מכיוון שחנן הוא הקולע ראשון, המאורע המבוקש הוא $\{X=Y\}\cup\{X=Y+1\}$ ($X=Y$ פירושו שחנן קלע ראשון ומיד אחריו יואב, ו־$X=Y+1$ פירושו שיואב קלע ראשון ומיד אחריו חנן). המאורעות $X=Y$ ו־$X=Y+1$ זרים (לא יתכן ש־$X=Y=Y+1$), ולכן ההסתברות היא

$$P(X=Y)+P(X=Y+1).$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה, לכל $a\geq 0$,

$$\begin{aligned}
P(X=Y+a) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=Y+a|Y=n)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a|Y=n)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{n+a-1}\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= \alpha\beta(1-\alpha)^a\sum_{n=1}^{\infty}((1-\alpha)(1-\beta))^{n-1}\\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^a}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}\\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^a}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

(שימו לב, במעבר השלישי, לשימוש בכך ש־X,Y בלתי תלויים.)
מחישוב זה יוצא ש־

$$P(X=Y)+P(X=Y+1)=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta(2-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

(אגב, אם $\alpha=\beta$, החישוב נותן $P(X=Y)+P(X=Y+1)=\alpha$. נסו להסביר עובדה זו באופן ישיר. הערה נוספת: חישובים כאלה קל בהרבה לבצע באותיות מאשר במספרים; אפשר ורצוי להציב את הערכים של α ו־β ברגע האחרון.)

לסעיף (ב), נסמן ב־W את מספר הנקודות שקולע יואב עד לקליעה הראשונה של חנן. ההתפלגות של W די מסובכת, ולכן איננו רוצים לחשב את התוחלת והשונות שלה ישירות. לעומת זאת, אם X ידוע, אז W הוא מספר הקליעות ב־$X-1$ נסיונות, ולכן $W|X\sim \mathrm{Bin}(X-1,\beta)$. מכאן מתקבל מיד ש־$\mathbf{E}(W|X)=\beta(X-1)$ וש־$\mathbf{V}(W|X)=\beta(1-\beta)(X-1)$. [אי־אפשר לענות לשאלה ב־"התוחלת היא βn כאשר n הוא מספר הזריקות עד לקליעה של חנן". התשובה צריכה להיות פונקציה של α ו־β, ללא משתנים שערכם אינו ידוע, וללא רשימות (אינסופיות) של אפשרויות.]

לפי חוק התוחלת החוזרת (שהוא וריאציה על נוסחת ההסתברות השלמה),

$$\mathbf{E}(W)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(W|X))=\mathbf{E}(\beta(X-1))=\beta(\mathbf{E}(X)-1)=\beta(\frac{1}{\alpha}-1)=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}.$$

באותו אופן ממש, לפי נוסחת פירוק השונות,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(W) &= \mathbf{E}(\mathbf{V}(W|X)) + \mathbf{V}(\mathbf{E}(W|X)) \\
&= \mathbf{E}(\beta(1-\beta)(X-1)) + \mathbf{V}(\beta(X-1)) \\
&= \beta(1-\beta)\mathbf{E}(X-1) + \beta^2\mathbf{V}(X-1) \\
&= \beta(1-\beta)\mathbf{E}(X-1) + \beta^2\mathbf{V}(X) \\
&= \beta(1-\beta)\frac{1-\alpha}{\alpha} + \beta^2\frac{1-\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha},
\end{aligned}$$

ובמקרה מתקבלת אותה תשובה בדיוק.