

## שאלות חזרה (88-165)

1. הגדר מהו מרחב מדגם (רציף).
2. כתוב במפורש את מרחב המדגם עבור התוצאות בהטלת שני מטבעות הוגנים - ראשית, כאשר המטבעות שונים זה מזה, ושנית, כאשר המטבעות זהים.
3. הוכח את הזהות  $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$ .
4. בכד יש כדור אחד שחור, שניים אדומים ושלושה לבנים. מוציאים ממנו שני כדורים. כתוב את מרחב המדגם וההסתברויות, אם הדגימה הם עם החזרה, ואם הדגימה היא ללא החזרה.
5. הגדר סיגמא-אלגברה על קבוצה  $X$ .
6. הוכח: חיתוך כלשהו של סיגמא-אלגברות על קבוצה נתונה, גם הוא סיגמא-אלגברה על אותה קבוצה.
7. תן דוגמא נגדית מפורשת: איחוד של שתי סיגמא-אלגברות על  $X$  אינו בהכרח סיגמא-אלגברה.
8. מצא את כל הסיגמא-אלגברות על  $\{1, 2, 3, 4\}$  הכוללות את  $\{1, 2\}$  ואת  $\{2, 3, 4\}$  אבל לא את  $\{1, 3\}$ .
9. נניח ש-  $X = \cup_{i \in I} A_i$  איחוד זר (לא-דוקא בן מניה) של קבוצות. מגדירים  $\mathcal{F} = \{T \subseteq X \mid \forall i \in I : T \cap A_i \in \{\emptyset, A_i\}\}$ . הוכח ש-  $\mathcal{F}$  סיגמא-אלגברה על  $X$ .
10. מבין הספרים שכתב סופר גבר, ל- 30% יש סוף עצוב. מבין הספרים בעלי סוף עצוב, 40% נכתבו על-ידי גברים. מבין הספרים בעלי סוף שאינו עצוב, 75% נכתבו על-ידי גברים. מצאו את הסיכוי לכך שלספר יהיה סוף עצוב.
11. נסמן ב-  $X$  וב-  $Y$  את התוצאות של הטלת קוביה כחולה וקוביה אדומה, בהתאמה. מגדירים  $Z = X - Y$ ,  $T$  - הזוגיות של  $X$ ,  $S$  - הזוגיות של  $X + Y$ ,  $R$  מקבל את הערך 1 אם  $X + Y < 6$ , את הערך 2 אם  $X + Y > 8$ , ואת הערך 0 אחרת. לגבי כל זוג של משתנים מבין  $Z, T, S$  ו-  $R$ , קבע (עם הוכחה) האם הם תלויים או בלתי תלויים.
12. תן דוגמא לשלושה משתנים מקריים תלויים, שכל שניים מהם בלתי תלויים. כנ"ל - שבעה משתנים מקריים תלויים, שכל ששה מהם בלתי תלויים.
13.  $A$  ו-  $B$  משתני ברנולי הוגנים ובלתי תלויים. הוכח שאם  $C$  בלתי תלוי גם ב-  $A$ , גם ב-  $B$  וגם ב-  $A + B \pmod{2}$ , אז  $A, B, C$  בלתי-תלויים במשותף.

14. נגדיר פונקציה  $f$  לפי  $f(x) = x$  עבור  $x \neq 0, 4$ , ו-  $f(x) = 4 - x$  עבור  $x = 0, 4$ . נניח שהמשתנים  $A, B, C, D$  מתפלגים, במשותף, על-פני הערכים  $\{0, 1\}^4$ , באופן הבא:  $P((A, B, C, D) = (a, b, c, d)) = \frac{f(a+b+c+d)}{32}$ . הוכח שכל שניים מהם בלתי תלויים, ושכל שלשה מהם - תלויים.

15. א. זורקים קוביה עד שהיא נופלת על 6, ואז ממשיכים לזרוק עד שהיא נופלת על 5. חשב את תוחלת מספר הפעמים שיש לזרוק את הקוביה. ב. כנ"ל, אלא שמחכים עד שהקוביה תיפול לפחות פעם אחת על 5 ופעם אחת על 6. ג. כנ"ל, אלא שמחכים עד שהקוביה תיפול על 6 פעמיים.

16. בחפיסה יש 12 קלפים, מהם 3 נסיכים. כמה קלפים יש לשלוף, בתוחלת, מחפיסה מעורבת היטב, עד להופעת הנסיך הראשון?

17. חברת ממתקים מפיצה בכל שקית קלף אחד מבין עשרה קלפים אפשריים. שזור הקלפים מכל סוג - אחיד. כמה שקיות יש לקנות, בתוחלת, עד להשלמת אוסף של כל עשרת הקלפים?

18. פיקוד העורף מעוניין לבדוק את צופרי החירום. המדינה מחולקת ל-1000 אזורים, שבכל אחד מהם 3000 אזרחים בוגרים. הפיקוד מבקש מכל אזרח ששמע את הצופר באזור שלו, לבחור מספר בין 1 ל- $n$  באקראי, ולחייג למוקד מיוחד רק אם עלה בגורלו המספר  $n$ . מה צריך להיות  $n$ , אם רוצים שהסיכוי לא לקבל אף הודעה מאזור שהצופר שלו פעל כשורה לא יעלה על 10%, ומטרת הפיקוד לצמצם את מספר הקריאות למוקד עד כמה שאפשר? כמה קריאות יהיו, בהנחה שכל הצופרים פעלו?

19. אם  $X, Y$  הם משתנים מקריים, אז  $X|Y$  משתנה מקרי התלוי בערך של  $Y$ , ולכן גם  $E(X|Y)$  היא משתנה מקרי התלוי בערך של  $Y$ . הוכח (במקרה הדיסקרטי) את הזהות  $E(X) = E(E(X|Y))$ .

20. הוכח (במקרה הדיסקרטי) את הזהות  $V(X) = V(E(X|Y)) + E(V(X|Y))$ .

21. מגרילים משתנה  $X$  בהתפלגות גאומטרית,  $X \sim G(0.5)$ , ואז מגרילים  $Y \sim \text{Bin}(X, p)$ . חשב את  $E(Y)$ .

22. חשב את התוחלת של  $2^X$  כאשר  $X \sim P(\lambda)$ .

23. משתנה מקרי  $X$  מקבל ערכים שלמים חיוביים בלבד. הוכח ש-  $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$ .

24. שלושה שחקנים,  $A, B$  ו-  $C$ , משחקים בתחרות שחמט שלושה משחקים (כל זוג משחק פעם אחת). במשחק שהסתיים בתיקו מקבל כל שחקן מחצית הנקודה, ואילו שחקן שניצח מקבל נקודה שלמה. ידוע שהסיכוי של  $A$  לנצח את  $B$  כפול מהסיכוי של  $B$  לנצח את  $C$ , וגדול פי ארבעה מהסיכוי של  $C$  לנצח את  $A$ . הסיכוי

לתיקו בכל משחק הוא 30%. תוחלת מספר הנקודות ש- $B$  מצפה לקבל בתחרות הוא 0.8. מצא את תוחלת מספר הנקודות ש- $A$  מצפה לקבל.

25. מסדרים שמונה כדורים לבנים ועשרה אדומים בשורה, באקראי. כל כדור שמשני צידיו כדורים מצבעים שונים, הוא 'כדור בודד' (הכדורים בקצה השורה לעולם אינם בודדים). מה תוחלת מספר הכדורים הבודדים? ומה התוחלת, אם מסדרים את הכדורים במעגל?

26. תן דוגמא למשתנים תלויים שאינם מתואמים (כלומר, המקיימים  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ).

27.  $X, Y$  ו- $Z$  הם משתנים מקריים. הוכח שאם  $Y$  בלתי מתואם עם  $X$  וגם עם  $Z$ , אז  $Y$  בלתי מתואם עם  $X + Z$ . תן דוגמא נגדית כאשר מחליפים 'בלתי מתואם עם' ב'בלתי תלוי ב'.

28. הוכח שאם  $Y$  משתנה מקרי שהוא בלתי מתואם עם  $X$  וגם עם  $Z$ , אז

$$\text{Cov}(XY, Z) = \text{Cov}(X, YZ).$$

29. מגרילים משתנה פואסוני  $X \sim P(\lambda)$ , ואז משתנה נורמלי  $Z \sim N(X, 1)$ . חשב את מקדם המתאם בין  $X$  ו- $Z$ .

30. מגרילים משתנה פואסוני  $N \sim P(\lambda)$ , ואז משתנה נורמלי  $Y \sim \text{Bin}(N, p)$ . הראה שהשוונות המשותפת של  $N$  ו- $Y$  היא  $\lambda p$ .

31.  $Y$  הוא משתנה מקרי המקיים  $E(Y + Y^2) = 8$ . תן חסם לא טריוויאלי לסיכוי ש- $|Y + 1/2| \geq 9$ .

32. הוכח את ה'כפליות של  $p - q$ : אם  $X \sim b(p)$  ו- $Y \sim b(p')$  משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי התפלגויות ברנולי, חשב את ההתפלגות של  $Z = X + Y$  (mod 2), ובפרט חשב את  $P(Z = 0) - P(Z = 1)$ .

33. הוכח: אם  $X$  מתפלג פואסונית, אז  $2X$  אינו מתפלג פואסונית.

34. אם  $X$  ו- $Y$  משתנים פואסוניים בלתי תלויים, הוכח ש- $X + Y$  מתפלג פואסונית.

35. חשב את הגבול של  $P(X_n = 1)$  כאשר  $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{n-a})$ , כאשר  $n \rightarrow \infty$  ו- $a$  קבוע.

36. בכד יש שלושה כדורים שחורים, שלושה כחולים ושלושה ירוקים. מוציאים שלושה כדורים בלי החזרה. חשב את הסיכוי לכך שיתקבל באופן הזה כדור אחד מכל צבע.

37. נניח ש- $X \sim U(0, 1)$ . הוכח ש- $-\log(X) \sim \text{Exp}(1)$ .
38. במכונה מותקנים חמישה רכיבים מסוג A וחמישה מסוג B. זמן החיים של רכיבים מהסוג הראשון מתפלג מעריכית עם תוחלת של שנה, וזמן החיים של הרכיבים מהסוג השני מתפלג מעריכית עם תוחלת של שנתיים. חשב את התפלגות הזמן עד לתקלה הראשונה במכונה.
39. כאשר מודדים מרחק של  $a$ , מכשיר המדידה מחזיר ערך המתפלג  $N(a, \sigma^2)$ . מעוניינים למדוד את האורכים של שני מוטות,  $x < y$ . מותר לבצע רק שתי מדידות. השווה בין השגיאה הצפויה במדידה ישירה של  $x$  ושל  $y$ , לבין השגיאה שתקבל אם מודדים את  $x + y$  ואת  $y - x$  ומחשבים מן התוצאות אומדנים ל- $x$  ול- $y$ . איזו שיטה עדיפה, אם המטרה היא להקטין את השונות בהערכת  $x$ ?
40. למשתנה מקרי  $X$  יש פונקציית הצטברות  $F_X(t) = P(x \leq t)$  שהיא רציפה ועולה ממש. הוכח שהמשתנה המקרי  $F_X^{-1}(X)$  הוא בעל התפלגות אחידה בקטע  $[0, 1]$ .
41. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי החיובי  $X$  שפונקציית הצפיפות שלו בקרן  $[0, \infty)$  היא  $f_X(t) = \frac{2}{\pi(t^2+1)}$ . הוכח שלמשתנה הזה אין שונות (כלומר, האינטגרל שמגדיר את השונות אינו מתכנס).
42. יהי  $X$  משתנה מקרי עם סיכוי חיובי לכך ש- $P(X < 0)$ , ותוחלת חיובית. הוכח שקיים ערך יחיד  $t$  כך ש- $E(e^{tX}) = 1$ . (הערך  $-\frac{1}{t}$  נקרא 'מקדם הסיכון' של המשתנה).
43. נסח והוכח את החוק החלש של המספרים הגדולים.
44. מגרילים מהתפלגות אחידה,  $U(0, 1)$ , מספרים  $X_1, \dots, X_{100}$ . מה הסיכוי לכך שהמכפלה שלהם  $\prod_{i=1}^{100} X_i$  קטנה מ- $e^{-80}$ ?
45. במדינה מסויימת הסיכוי שהיום יהיה גשום הוא  $1/3$  אם ירד גשם ביום הקודם, ו- $1/10$  היום לא יורד גשם. כמה ימים יש לחכות, בתוחלת, עד שיהיו שני ימי גשם רצופים?

## פתרונות לשאלות.

37. שיטה ראשונה. לפי נוסחת ההצבה, אם  $Y = h(X)$  פונקציה גזירה הפיכה) אז  $f_Y(h(x)) = f_X(x) \cdot |h'(x)|^{-1}$  ובמילים אחרות (אם לוקחים  $f_X(x) = f_Y(y) = f_X(h^{-1}(x)) \cdot |h'(h^{-1}(y))|$ ,  $(y = h(x))$  אצלנו  $f_X(x) = I_{[0,1]}(x)$  היא הפונקציה המציינת של הקטע,  $h(x) = -\log(x)$ ,  $h'(x) = \frac{-1}{x}$  ו-  $h^{-1}(y) = e^{-y}$  ומהצבה מתקבלת הנוסחה  $f_Y(y) = I_{[0,\infty)}(y)e^{-y}$ . שיטה שניה. לפי פונקציית ההתפלגות המצטברת.

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(-\log(X) \leq t) = P(X \geq e^{-t}) = 1 - e^{-t},$$

וכשגוזרים מתקבלת פונקציית הצפיפות  $f_Y(t) = F'_Y(t) = e^{-t}$

44. התנאי  $\prod X_i < e^{-80}$  שקול לתנאי  $\sum (-\log(X_i)) > 80$ . לפי שאלה 37,  $E(-\log(X_i)) = V(-\log(X_i)) = 1$ , ולכן לפי משפט הגבול המרכזי  $Z = \frac{S_{100} - 100}{1/\sqrt{100}}$  מתפלג, בקירוב, לפי ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית. כעת,  $P(S_{100} > 80) = P(Z = \frac{S_{100} - 100}{1/\sqrt{100}} > \frac{80 - 100}{1/\sqrt{100}} = -2)$ , ולפי הטבלאות זה בערך 97.72%.

42. נסמן  $M(t) = E(e^{tX})$ . אז  $M''(t) = E(X^2 e^{tX}) > 0$  ולכן  $M'$  עולה. אבל  $M(0) = 1$ ,  $M'(0) = E(X) > 0$  ו-  $\lim_{t \rightarrow -\infty} M(t) = \infty$  ולכן  $M' < 0$  לפעמים. נובע מכאן שיש ערך יחיד שעבורו  $M'(t) = 0$ ; מכאן נובע שלמשוואה  $M(t) = 1$  יש פתרון יחיד.