

תאוריה סטטיסטית 1, 5-2-88

ד"ר ע. וישנה
מועד א', תשס"ז

יש לענות על כל השאלות (עובדה זו תלקח בחשבון בניקוד התשובות). אין להשתמש בחומר עזר פרט לדפי הסיכום המצ"ב, ובמחשבון. בהצלחה

1. $n \geq 3$ נתון.

- (א) תנו דוגמא להתפלגות רב-ממדית של וקטור (X_1, \dots, X_n) , שבה כל משתנה $X_i \sim b(\frac{1}{2})$, בעוד שכל X_i, X_j ($i \neq j$) תלויים סטטיסטית.
- (ב) תנו דוגמא להתפלגות רב-ממדית של וקטור כנ"ל, שבה כל זוג משתנים הם בלתי תלויים, בעוד שאף שלשה אינה בלתי-תלויה במשותף.
- (ג) נניח שהמשתנים $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ הם בעלי התפלגות כלשהי, כך ש- $X_i, Y_i \sim b(\frac{1}{2})$, ונניח ש- $R_1, \dots, R_n \sim b(\frac{1}{2})$ הם משתנים בלתי-תלויים. הוכיחו שהמשתנים $X_1 + R_1, \dots, X_n + R_n, Y_1 + R_1, \dots, Y_n + R_n$ הם בלתי תלויים בשלשות, אבל לא בהכרח ברביעיות.

2. נתון מדגם X_1, \dots, X_n מהתפלגות $U(\alpha, \alpha + \delta\alpha)$, כאשר α, δ שני פרמטרים שאינם ידועים. נסמן ב- $Y_1 \leq \dots \leq Y_n$ את סטטיסטי הסדר המתאימים למדגם.

- (א) מצאו אומדים לשני הפרמטרים לפי שיטת המומנטים.
- (ב) כתבו במדויק את הנוסחה לנראות המדגם, בתלות ב- $\alpha, \delta, X_1, \dots, X_n$.
- (ג) מצאו אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים.
- (ד) הראו ש- Y_1, Y_n מספיקים במשותף.
- (ה) תארו במדויק את ההתפלגות של X_k בהנתן Y_1, Y_n [זהירות].
3. למשתנה דו-ממדי יש התפלגות רב-נורמלית $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$, כאשר מקדם המתאם ρ ידוע, ו- σ פרמטר שאינו ידוע. מן ההתפלגות הזו נלקח מדגם בלתי-תלוי $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}\right)$, ורוצים לאמוד את σ^2 .

- (א) מה ההתפלגות של X_i ?
- (ב) מצאו UMVUE ל- σ^2 , בהנחה שידועים רק X_1, \dots, X_n . נסמן אומד זה ב- T_1 . אם $T_1 = t(X_1, \dots, X_n)$, נסמן $T_2 = t(Y_1, \dots, Y_n)$ (לפי סימטריה, T_2 הוא UMVUE מבין האומדים המשתמשים ב- Y_i בלבד).
- (ג) מצאו UMVUE אמיתי ל- σ^2 (אומד חסר הטוה בעל שונות מינימלית, ללא המגבלה שבסעיף ב'). נסמן אומד זה ב- T .
- (ד) חשבו את השונות של האומדים T_1, T_2 ו- T .
- [נתונים: אם $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$ אז $E(Z_1^2 Z_2^2) = 1 + 2\rho^2$ ו- $E(Z_1 Z_2^3) = 3\rho$]
- (ה) מי עדיף, T או $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$?