

## תורת גלואה 88-311

פרופ' ע. וישנה

תשע"ח, מועד א'

ענו על ארבע מחמש השאלות. לכל השאלות משקל שווה.  
**משך המבחן.** שעתיים וחצי.

1. נסמן  $\rho = \rho_8 = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{-2}}{2}$ ,  $\alpha = \sqrt[4]{2}$ .

(א) מצא את ממד ההרחבה  $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$  ואת כל שדות הביניים.

(ב) הראה ש- $E = \mathbb{Q}[\alpha, \rho]$  היא הרחבת גלואה של  $\mathbb{Q}$ . מה הממד שלה?

(ג) מצא את חבורת גלואה  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  ותאר כמה משדות הביניים.

(ד) הוכח ש- $E$  הוא שדה הפיצול של  $\lambda^4 + 2$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

2. (א) מצא את הפולינום המינימלי  $\Phi_{12}$  של  $\rho_{12} = e^{\pi i/6}$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

(ב) הוכח ש- $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\rho_{12}]$ .

(ג) פרק את  $\Phi_{12}$  לגורמים אי-פריקים מעל השדה  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ .

3. (א) הוכח (בקצרה) שאם  $F \subset K \subset E$  שדות ו- $E/F$  הרחבת גלואה, אז גם  $E/K$  הרחבת גלואה.

(ב) תן דוגמא לשדות כנ"ל כך ש- $E/F$  הרחבת גלואה, ו- $K/F$  הרחבה שאינה נורמלית.

4. (א) הסבר (ברמת פירוט סבירה) מדוע אי אפשר לבנות במחוגה וסרגל מצולע משוכלל בן 21 צלעות.

(ב) נניח שנתון משובע משוכלל. הראה שאפשר לבנות בעזרתו את המצולע מסעיף א'.

5.  $\gamma$  הוא שורש של פולינום אי-פריק ממעלה 3 מעל  $\mathbb{F}_3$ . הוכח ש- $\gamma^{13} \in \mathbb{F}_3$ .

**בהצלחה.**