אלגברה קומוטטיבית, 88-813

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ט

ענו על ארבע שאלות. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.

משך המבחן. שלוש שעות. חומר עזר מותר בשימוש: אין.

1. נתבונן בחבורה האבלית $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}] = \bigcup_{n\geq 0} 10^{-n}\mathbb{Z}$ כמודול מעל החוג $\mathbb{Z}$.

   (א) הראה שכל תת־מודול נוצר סופית של $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ הוא ציקלי.

   (ב) הראה שהמודול $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ אינו ארטיני.

   (ג) הראה שמודול המנה $M = \mathbb{Z}[\frac{1}{10}]/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ כן ארטיני.

2. (א) הגדר את הרדיקל $\sqrt{I}$ של אידיאל I בחוג קומוטטיבי, והסבר (בקצרה) מדוע זה אידיאל.

   (ב) הראה שאם $I \subseteq P$, כאשר P אידיאל ראשוני, אז גם $\sqrt{I} \subseteq P$.

   (ג) הוכח שהרדיקל של I שווה לחיתוך הראשוניים המכילים את I.

3. התבונן בתת־החוג $A = \mathbb{C}[xy, xz, yz] \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$. מצא תת־חוג של A שהוא איזומורפי לחוג פולינומים, וכך ש־A שלם מעליו. הוכח את הטענה השניה.

4. נתון פולינום $f \in \mathbb{C}[x, y]$ המקיים $f(\alpha^2, \alpha) = 0$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$. הראה שבחוג הפולינומים, f הוא כפולה של $x - y^2$ (רמז: משפט האפסים של הילברט).

5. (א) נסח את משפט האידיאל הראשי של קרול בלי להשתמש במלה "מינימלי".

   (ב) יהי R חוג נתרי קומוטטיבי. תהי $P_2 \subset P_1 \subset P_0$ שרשרת של אידיאלים ראשוניים, ויהי $b \in P_0$. אז יש שרשרת $Q_2 \subset Q_1 \subset P_0$, כך ש־$b \in Q_1$.

   (ג) תן דוגמא לחוג נתרי קומוטטיבי R, עם אידיאלים ראשוניים $P_2 \subset P_1 \subset P_0$ ואיבר $b \in P_0$, כך שלא קיימת שרשרת של ראשוניים $Q_2 \subset Q_1 \subset P_0$ שעבורה $b \in Q_2$.

בהצלחה.

Commutative Algebra, 88-813

Prof. U. Vishne

Exam A, 2019

(This version is identical to the Hebrew version).

Answer four Questions. Clearly mark at the top of each page what questions is being solved there. Do not answer items from distinct questions on the same page.

Duration of the exam. 180 minutes. Allowed material: none.

1. Consider the abelian group $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}] = \bigcup_{n\geq 0} 10^{-n}\mathbb{Z}$ as a module over the ring $\mathbb{Z}$.
   (a) Show that every finitely generated submodule of $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ is cyclic.
   (b) Show that the module $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ is not Artinian.
   (c) Show that the quotient module $M = \mathbb{Z}[\frac{1}{10}]/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ is Artinian

2. (a) Define the radical $\sqrt{I}$ of an ideal I in a commutative ring, and (briefly) explain why is this an ideal.
   (b) Show that if $I \subseteq P$, where P is a prime ideal, then $\sqrt{I} \subseteq P$ as well.
   (c) Show that the radical of I is equal to the intersection of the primes containing I.

3. Consider the subring $A = \mathbb{C}[xy, xz, yz] \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$. Find a subring of A which is isomorphic to a ring of polynomials, and such that A is integral over it. Prove the latter claim.

4. We are given a polynomial $f \in \mathbb{C}[x, y]$ for which $f(\alpha, \alpha^2) = 0$ for every $\alpha \in \mathbb{C}$. Show that in the polynomial ring, f is a multiple of $x - y^2$ (hint: Hilbert's Nullstellensatz).

5. (a) State Krull's Principal Ideal Theorem (PIT), avoiding the word "minimal".
   (b) Let R be a commutative Noetherian ring. Let $P_2 \subset P_1 \subset P_0$ be a chain of prime ideals, and let $b \in P_0$. Then there is a chain of primes $Q_2 \subset Q_1 \subset P_0 = P$, such that $b \in Q_1$.
   (c) Give an example of a commutative Noetherian ring R, with prime ideals $P_2 \subset P_1 \subset P_0$ and an element $b \in P_0$, such that there is no chain of primes $Q_2 \subset Q_1 \subset P_0$ for which $b \in Q_{\mathbf{2}}$.