

אלגברה לא קומוטטיבית 88-815

פרופ' ע. וישנה
מועד א', תשע"ג

ענו על כל השאלות. משך הבחינה שעתיים וחצי, ללא חומר עזר. הניקוד לשאלות השונות יהיה 10, 15, 20, 25, 30, ממויין מן השאלה הטובה ביותר ומטה.

1. (א) הגדר את התשתית $\text{soc}(M)$ של מודול M .
(ב) יהיו $K \leq M$ מודול ותת-מודול. הראה ש- $\text{soc}(M/K) \leq (\text{soc}(M) + K)/K$.
(ג) תן דוגמא שבה ההכלה אמיתית.
2. הגדר חוג פרימיטיבי. הראה שכל חוג פרימיטיבי הוא ראשוני.
3. נסח והוכח את משפט משקה (די בכיוון המבטיח שאלגברת החבורה היא בעלת תכונה מסוימת).
4. (א) S היא אלגברה מעל השדה \mathbb{C} , ו- M מודול אי-פריק שלה שהוא מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{C} . הראה שכל אנדומורפיזם $\varphi \in \text{End}_S(M)$ הוא כפל בסקלר מרוכב.
(ב) תן דוגמא נגדית לסעיף א' מעל השדה \mathbb{R} (כלומר, הצג אלגברה S_0 מעל \mathbb{R} , עם מודול אי-פריק M_0 שהוא מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{R} , ואנדומורפיזם $\varphi_0 \in \text{End}_{S_0}(M_0)$ שאינו כפל בסקלר ממשי).
(ג) [סעיף בונוס] בדוגמא של סעיף ב', $S = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} S_0$ היא אלגברה מעל \mathbb{C} , ו- $M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} M_0$ הוא מודול מעל S לפי הפעולה $\alpha\beta \otimes av = (\alpha \otimes a)(\beta \otimes v)$. האופרטור $1 \otimes \varphi$ פועל על M לפי $(1 \otimes \varphi)(\beta \otimes v) = \beta \otimes \varphi(v)$, והוא אנדומורפיזם מעל S . הסבר מדוע זו אינה דוגמא נגדית לסעיף א'.
5. בנה את לוח הקרקטרים של A_4 (חבורת התמורות הזוגיות ב- S_4 ; בת 4 מחלקות צמידות) מעל \mathbb{C} .
[נא להציג גרסאות חלקיות של לוח הקרקטרים בהתאם להתקדמות הנימוקים].

בהצלחה!