הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' מ. שפס וד"ר ע. וישנה

מועד א' - פתרון, תשס"ח

1. נסמן ב- $\bullet$ כדור שחור, וב- $\circ$ כדור אדום. נסמן ב- I את המאורע 'נבחר הכד הראשון', וב-II את המאורע 'נבחר הכד השני'. בתחילה נניח שהדגימה היא עם החזרה. קל לחשב את ההסתברויות המותנות:

$$P(\bullet\bullet|I)=\frac{4}{9},\ P(\bullet\circ|I)=\frac{2}{9},\ P(\circ\bullet|I)=\frac{2}{9},\ P(\circ\circ|I)=\frac{1}{9};$$

$$P(\bullet\bullet|II)=\frac{1}{9},\ P(\bullet\circ|II)=\frac{2}{9},\ P(\circ\bullet|II)=\frac{2}{9},\ P(\circ\circ|II)=\frac{4}{9}.$$

אבל לפי הנתון $P(I)=P(II)=\frac{1}{2}$, ולכן נוסחת ההסתברות השלמה מאפשרת לחשב

$$P(\bullet\bullet)=\frac{5}{18},\ P(\bullet\circ)=\frac{2}{9},\ P(\circ\bullet)=\frac{2}{9},\ P(\circ\circ)=\frac{5}{18}.$$

לפי נוסחת ההיפוך $P(I|A)=\frac{P(A|I)P(I)}{P(A)}$, אפשר כעת לחשב

$$P(I|\bullet\bullet)=\frac{4}{5},\ P(I|\bullet\circ)=\frac{1}{2},\ P(I|\circ\bullet)=\frac{1}{2},\ P(I|\circ\circ)=\frac{1}{5}.$$

נעבור לחישוב ללא החזרה.

$$P(\bullet\bullet|I)=\frac{1}{3},\ P(\bullet\circ|I)=\frac{1}{3},\ P(\circ\bullet|I)=\frac{1}{3},\ P(\circ\circ|I)=0;$$

$$P(\bullet\bullet|II)=0,\ P(\bullet\circ|II)=\frac{1}{3},\ P(\circ\bullet|II)=\frac{1}{3},\ P(\circ\circ|II)=\frac{1}{3}.$$

ולכן נוסחת ההסתברות השלמה מאפשרת לחשב

$$P(\bullet\bullet)=\frac{1}{6},\ P(\bullet\circ)=\frac{1}{3},\ P(\circ\bullet)=\frac{1}{3},\ P(\circ\circ)=\frac{1}{6}.$$

לפי נוסחת ההיפוך,

$$P(I|\bullet\bullet)=1,\ P(I|\bullet\circ)=\frac{1}{2},\ P(I|\circ\bullet)=\frac{1}{2},\ P(I|\circ\circ)=0.$$

השיטה השניה נותנת תוצאות מובהקות יותר.

2. $P(X \text{ זוגי})=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=2n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n}}{(2n)!}$, אבל $e^{\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$ ו- $e^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}$; לכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m+(-\lambda)^m}{2m!}=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$, ומכאן ש- $P(X \text{ זוגי})=\frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}+e^{-\lambda})}{2}=\frac{e^{-2\lambda}+1}{2}$.

.3

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)(X-2)) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k(k-1)(k-2) \\
&= \sum_{k=3}^{n} P(X=k)k(k-1)(k-2) \\
&= \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k(k-1)(k-2) \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} k(k-1)(k-2) \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} p^{k-3} q^{(n-3)-(k-3)} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3.
\end{aligned}
$$

4. עבור $n \geq 1$, מתקיים

$$
\begin{aligned}
P(Y=n) &= P(1+[X]=n) = P(n-1 \leq X < n) \\
&= P(X<n) - P(X<n-1) = (1-e^{-3n}) - (1-e^{-3(n-1)}) \\
&= e^{-3(n-1)} - e^{-3n} = e^{-3n}(e^3-1).
\end{aligned}
$$

לכן $\frac{P(Y=n+1)}{P(Y=n)} = \frac{e^{-3(n+1)}}{e^{-3n}} = e^{-3}$, כלומר, $Y \sim G(1-e^{-3})$, התפלגות גאומטרית. מכאן ש- $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{e^3}{e^3-1}$.

5. נסמן $n = 18000$.

(א) נסמן ב- X_k את מספר הפעמים שהתקבל בקוביה k. ברור ש- $X_6 \sim \mathrm{Bin}(18000, 1/6)$, עם תוחלת $\frac{1}{6}n = 3000$ ושונות $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}n = 2500$. ובקירוב נורמלי $X_6 \sim N(3000, 2500)$. לכן

$$
P(X_6 \geq 3098) = P(\frac{X_6 - 3000}{50} \geq \frac{3098-3000}{50} = 1.96),
$$

ולפי הטבלה הסיכוי הזה הוא $1 - 0.9750 = 0.025$.

(ב) כמקודם, אפשר להניח $X_1, X_4 \sim N(3000, 2500)$, ולכן $E(X_1 - X_4) = E(X_1) - E(X_4) = 0$. אם נניח ש- X_1, X_4 בלתי תלויים, נקבל $V(X_1 - X_4) = V(X_1) + V(X_4) = 5000$. לפי ההנחה (השגויה) הזו,

$$
P(X_1 - X_4 \geq 80) = P(\frac{X_1 - X_4}{\sqrt{5000}} \geq \frac{80}{\sqrt{5000}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \approx 1.132),
$$

ולכן הסיכוי הוא, כביכול, 0.1289.

למען האמת,

$$X_1 + X_4 \sim \mathrm{Bin}(18000, 1/3),$$

ולכן $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} n = V(X_1 + X_4) = V(X_1) + V(X_4) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_4) = \frac{5}{18} n + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_4)$, כלומר $\mathrm{Cov}(X_1, X_4) = -\frac{1}{36} n$. לכן

$$V(X_1 - X_4) = V(X_1) + V(X_4) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_4) = (\frac{5}{18} + \frac{1}{18}) n = \frac{n}{3} = 6000.$$

בסופו של דבר,

$$P(X_1 - X_4 \geq 80) = P(\frac{X_1 - X_4}{\sqrt{6000}} \geq \frac{80}{\sqrt{6000}} = \frac{4\sqrt{15}}{15} \approx 1.033),$$

ולכן הסיכוי הוא 0.1508.

6. (א) $P(X \geq 5\mu) \leq \frac{1}{5}$.

(ב) $P(X \geq 5\mu) \leq P(X \leq 3\mu) + P(X \geq 5\mu) = P(|X - \mu| \geq 4\mu) \leq \frac{1}{4^2}$.

(ג) $P(X \geq 5\mu) = \int_{5\mu}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} dt = e^{-5}$.

7. מדובר בתהליך מרקוב עם מטריצת מעבר $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$ (לפי ההסכם שסכומי עמודות הם 1; אחרת מדובר במטריצה A^t); השורה והעמודה הראשונים מתאימים למצב 'גשם'. הסיכוי לגשם ביום נתון מחושב לפי ההתפלגות הסטציונרית, המקיימת $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, כלומר $2x = y$. אבל גם $x + y = 1$; לכן $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, וההסתברות היא $1/3$.