הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' ע. וישנה

סמסטר א', מועד א', תשס"ט - **פתרון**

1. המנהל בתחנת הימורים מטיל שני מטבעות (כל המטבעות בשאלה הם הוגנים, ויש להם שני ערכים אפשריים: 0 או 1), ומסמן את התוצאות ב־S_0 ו־S_1. אחר־כך הוא מטיל שלושה מטבעות נוספים, Y, Z, W. אם יצא $Y = 0$, הוא מפרסם את $X_0 = S_0$ ואת $X_1 = S_1$. אחרת, הוא מטיל שני מטבעות, Z ו־W, ומפרסם את $X_Z = W \cdot S_Z$ ואת $X_{1-Z} = S_{1-Z}$.

(א) חשב את התוחלת של X_0. **פתרון**. אם $Y = 0$, או $Y = 1$ אבל $Z = 1$, אז $X_0 = S_0$; זה קורה בסיכוי $\frac{3}{4}$. לעומת זאת אם $Y = 1$ ו־ $Z = 0$, אז $X_0 = WS_0$; זה קורה בסיכוי $\frac{1}{4}$. במקרה הראשון התוחלת של X_0 היא $\frac{1}{2}$, ובשני $\frac{1}{4}$. לכן $E(X_0) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{16}}$.

(ב) האם הערכים של X_0 ו־ X_1 תלויים או בלתי תלויים? הוכח. **פתרון**. מטעמי סימטריה, $E(X_1) = E(X_0) = \frac{7}{16}$, ובמשתני ברנולי $P(X_0 = 1) = E(X_0)$. אבל הסיכוי למאורע $X_0 = X_1 = 0$ הוא $\frac{1}{4}$ כאשר $Y = 0$, ו־ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ אם $Y = 1$. הממוצע $\frac{5}{16}$ שונה מהמכפלה $(\frac{7}{16})^2$, ולכן $\boxed{\text{המשתנים תלויים}}$.

(ג) מהו הסיכוי של המאורע $W = 1$, בהנתן ש־ $Y = 1$? **פתרון**. Y ו־W בלתי תלויים, ולכן $P(Y = 1|W = 1) = P(Y = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(ד) חשב את ההתפלגות המשותפת של W ו־Z בהנתן ש־ $X_1 = 1$. **פתרון**. מכיוון ש־$X_1 = S_1$ או $X_1 = S_1W$, הנתון קובע שגם $S_1 = 1$. בכל המצבים האפשריים של Y, Z, W (שהם בלתי תלויים), $X_1 = 0$ רק אם $Y = 1, Z = 1, W = 0$. לכן הנתון משאיר שבעה מצבים, וההתפלגות של (Z, W) היא $\boxed{(0,0), (0,1) \text{ ו־} (1,1) \text{ בסיכוי } \frac{2}{7} \text{ לכל זוג, ו־ } (1,0) \text{ בסיכוי } \frac{1}{7}}$.

2. יהי X משתנה מקרי רציף בעל התפלגות אחידה, $X \sim U[0,1]$. נסמן $Y = \frac{1-X}{1+X}$.

(א) מהו תחום הערכים ש־Y יכול לקבל? **פתרון**. מכיוון ש־ $0 \leq X \leq 1$, $1 \leq \frac{2}{1+X} \leq 2$ ו־ $Y = \frac{2}{1+X} - 1$ $\boxed{\text{בתחום } [0,1]}$.

(ב) מה פונקציית הצפיפות של Y? (במפורש: מצא את $f_Y(y)$. כתוב למשל את $f_Y(\frac{1}{2})$.) **פתרון**. נסמן $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$; כך $h'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$, ואם $y = h(x)$ אז $x = h(y)$. **הערה**. זו תכונה מיוחדת ל־h הזו. לפי הנוסחה להחלפת משתנים, $\boxed{f_Y(y) = |h(x)|^{-1} = \frac{(1+x)^2}{2} = \frac{2}{(1+y)^2} \text{ לכל } 0 \leq y \leq 1\text{; בפרט } f_Y(y) = \frac{8}{9}}$.

(ג) חשב את התוחלת של Y. **פתרון**. $E(Y) = \int_0^1 \frac{2}{(1+y)^2} y dy = 2\int_0^1 \frac{1}{y+1} dy - 2\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2} dy = [2\log(y+1) + \frac{2}{y+1}]_0^1 = \boxed{2\log(2) - 1}$.

3. מספר המלים החדשות שסופר ממציא בספר נתון מתפלג פואסונית, $X \sim P(4)$. כאשר הסופר ממציא n מלים חדשות, הסיכוי לכך שהספר טוב הוא $\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. נגדיר משתנה מקרי G: $G=1$ אם הספר טוב, ו־ $G=0$ אחרת.

(א) נסמן את התוחלת של G ב־μ. חשב את $P(G=1)$ במונחי μ. **פתרון**. $\mu = 1\cdot P(G=1)+0\cdot P(G=0)$ ולכן $\boxed{P(G=1)=\mu}$.

(ב) חשב את μ (כמספר). **פתרון**. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(G=1) = \sum_{n=0}^\infty P(G=1|X=n)\cdot P(X=n) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{6}(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{e^{-4}4^n}{n!} = \frac{e^{-4}}{6}\sum_{n=0}^\infty\frac{(8/3)^n}{n!} = \frac{e^{-4}}{6}e^{8/3} = \boxed{\frac{1}{6}e^{-4/3}}$.

(ג) מצא את ההתפלגות של X בהנתן שהספר טוב. **פתרון**.

$$P(X=n|G=1) = P(G=1|X=n)\cdot\frac{P(X=n)}{P(G=1)} = \frac{1}{6}(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{\frac{e^{-4}4^n}{n!}}{\frac{1}{6}e^{-4/3}} = \frac{e^{-8/3}(8/3)^n}{n!},$$

כלומר $X|G=1$ $\boxed{\text{מתפלג פואסונית, } X|G=1\sim P(8/3)}$.

(ד) מצא את התוחלת של X באותה הנחה, כלומר את $E(X|G=1)$. **פתרון**. מכיוון שזו התפלגות פואסונית, $\boxed{E(X|G=1)=\frac{8}{3}}$.

4. $X_1,\dots,X_n$ הם משתנים אקראיים בלתי־תלויים, עם תוחלת 0 ושונות 1. מגדירים את סדרת הסכומים החלקיים $S_i = X_1+\cdots+X_i$, ואת הממוצע $T_n=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$.

(א) חשב את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}(S_i,S_j)$ לכל i,j. **פתרון**. $\mathrm{Cov}(S_i,S_j) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{j}\mathrm{Cov}(X_s,X_t) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{j}\delta_{s,t} = \boxed{\min(i,j)}$.

(ב) הוכח ש־ $\Pr\{|X_1+\cdots+X_n|\geq n^{3/5}\}\to 0$ כאשר $n\to\infty$. **פתרון**. $E(X_1+\cdots+X_n)=0$ ו־ $V(X_1+\cdots+X_n)=n$, ולפי אי־שוויון צ'ביצ'ב

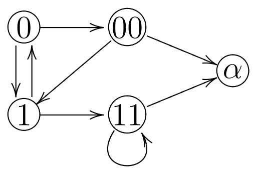
$$P(|X_1+\cdots+X_n|\geq n^{3/5}=n^{1/10}\cdot n^{1/2})\leq\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^2\to 0.$$

5. ידוע ש־20% מן הציבור תומכים במפלגת 'שלמת בטון ומלט'. סוקר א' דוגם באקראי 800 איש, ואילו סוקר ב' דוגם 1000 איש.

(א) מה הסיכוי שמספר התומכים במפלגה אצל הסוקר הראשון יעלה על 200? **פתרון**. נסמן את מספר התומכים אצל הסוקר הראשון ב־ X_1; אז $X_1\sim \mathrm{Bin}(800,\frac{1}{5})$, ובקירוב $X_1\sim N(160,128)$. לכן $P(X_1>200) = P(\frac{X_1-160}{\sqrt{128}} > \frac{200-160}{\sqrt{128}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}) \sim 1-\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) \sim 1-\Phi(3.53)\boxed{\sim 0.0002}$.

(ב) מה הסיכוי לכך שמספר התומכים אצל הסוקר הראשון יעלה על מספרם אצל הסוקר השני? **פתרון**. נסמן ב־ X_2 את מספר התומכים אצל הסוקר השני; אז $X_2 \sim \mathrm{Bin}(1000, \frac{1}{5})$, ובקירוב $X_2 \sim N(200, 160)$. נסמן $D = X_1 - X_2$, אז מכיוון שהתוצאות בלתי תלויות, $D \sim N(160-200, 128+160) = N(-40, 288)$, ו־ $P(D > 0) = P(\frac{D+40}{\sqrt{288}} > \frac{40}{\sqrt{288}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2.357) \approx \boxed{0.0092}$.

6. מטילים מטבע הוגן בעל שני צדדים: 0 ו־1. מה תוחלת מספר המטבעות שיש להטיל עד שיופיע הראשון מבין שני הרצפים 110 ו־000 (משמאל לימין)? **פתרון**. נתבונן בתהליך המרקובי בעל המצבים $0, 1, 00, 11, \alpha$, כאשר α מציין את המצב שבו התקבל אחד משני הרצפים $000, 110$. כל מצב מציין את הרצף הרלוונטי הארוך ביותר שהתקבל זה עתה; כך, ממצב 0 אפשר לעבור למצבים 00 או 1; ממצב 00 אפשר לעבור למצבים 1 או α; וממצב 11 אפשר לעבור למצבים 11 (אם מטילים שוב 1) או α:



אם נסמן ב־ e_i את תוחלת הזמן עד α בהנתן שעד כה הוטל הרצף i, אז $e_\alpha = 0$ ושאר המשוואות הן $e_0 = 1 + \frac{1}{2}e_{00} + \frac{1}{2}e_1$, $e_1 = 1 + \frac{1}{2}e_{11} + \frac{1}{2}e_0$, $e_{00} = 1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_\alpha$, ו־ $e_{11} = 1 + \frac{1}{2}e_{11} + \frac{1}{2}e_\alpha$. לכן $e_{11} = 2$, $e_0 = 24/5$, $e_{00} = 16/5$, $e_1 = 22/5$. לפני שהוטל המטבע הראשון, התוחלת היא $\boxed{28/5} = 1 + (24/5 + 22/5)/2$.