הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' ע. וישנה

סמסטר א', מועד א', תש"ע

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות. חובה לסמן באופן ברור איזה סעיף של איזו שאלה פותרים בכל עמוד, ולהקיף במסגרת את התשובה הסופית בכל סעיף.
משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר מותר בשימוש: דף עזר (מצורף). מחשבון פשוט (לא סימבולי).

1. למשתנה מקרי המוגדר בתחום $x > \log(a)-$ יש צפיפות $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$. (א) מצא את ערכו של a. (ב) חשב את התוחלת $E(X)$. (ג) חשב את ההסתברות $P(X \geq 0)$.

2. בחדר המיון יש חולים קלים (זמן הטיפול מתפלג מעריכית עם תוחלת 15 דקות) וחולים קשים (זמן הטיפול מתפלג מעריכית עם תוחלת 60 דקות). לשני סוגי החולים הסתברות שווה, א-פריורי. אדם מסויים מטופל כבר מזה 15 דקות. כמה זמן יש לו עוד להיות מטופל, בתוחלת?

3. מספר הכדורים הלבנים בכד מתפלג פואסונית עם פרמטר λ. מה תוחלת מספר הכדורים שיש להוציא עד שנתקלים בכדור השחור היחיד - עם החזרה? בלי החזרה?

4. במערכת חשמלית מורכבת מפעילים נורות קצרות-חיים, שזמן הפעולה של כל אחת מהן מתפלג מעריכית עם תוחלת של שניה אחת. הנורות פועלות בזו אחר זו. מה הסיכוי שפעולה של 1000 שניות תצרוך 1100 נורות או יותר? ומה הסיכוי ש-1000 נורות תפעלנה 1100 שניות או יותר?

5. המשתנים $X_0, X_1, \ldots$ מתפלגים ברנולי $b(\frac{1}{2})$ והם בלתי תלויים. הגדר סדרת מרקוב $Y_0, Y_1, \ldots$ שתאפשר לך להתייחס למשתנה T, המודד את זמן ההמתנה עד להופעה הראשונה של הרצף 0011 (משמאל לימין).

   (א) תאר במפורש את המצבים של התהליך, והגדר מתי Y_n מקבל כל ערך אפשרי, במונחי הסדרה $\{X_i\}$.

   (ב) מהן הסתברויות המעבר? (במטריצה, בגרף או בדרך מוגדרת-היטב אחרת)

   (ג) הגדר במדוייק את המשתנה המקרי T. מה התוחלת שלו?

בהצלחה.

הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' ע. וישנה

סמסטר א', מועד א', תש"ע - **פתרון**

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות. חובה לסמן באופן ברור איזה סעיף של איזו שאלה פותרים בכל עמוד, ולהקיף במסגרת את התשובה הסופית בכל סעיף.
משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר מותר בשימוש: דף עזר (מצורף). מחשבון פשוט (לא סימבולי).

1. למשתנה מקרי המוגדר בתחום $x > -\log(a)$ יש צפיפות $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$. (א) מצא את ערכו של a. (ב) חשב את התוחלת $E(X)$. (ג) חשב את ההסתברות $P(X \geq 0)$.

פתרון. (א) $1 = \int_{-\log(a)}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-2x}dx = [-\frac{1}{4}e^{-2x}]|_{-\log(a)}^{\infty} = \frac{1}{4}e^{2\log(a)} = \frac{a^2}{4}$ ולכן $\mathbf{a=2}$. (ב) $E(X) = \int_{-\log(2)}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-2x}xdx = [-\frac{1}{4}e^{-2x}x - \frac{1}{8}e^{-2x}]|_{-\log(2)}^{\infty} = \mathbf{\frac{1}{2} - \log(2)}$ (ג) $P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-2x}dx = [-\frac{1}{4}e^{-2x}]|_0^{\infty} = \mathbf{\frac{1}{4}}$.

[היו שקיבלו הסתברות $P(X \geq 0)$ שלילית, או 1. חשוב לבדוק בסוף החישוב שהתשובה מתקבלת על הדעת.]

2. בחדר המיון יש חולים קלים (זמן הטיפול מתפלג מעריכית עם תוחלת 15 דקות) וחולים קשים (זמן הטיפול מתפלג מעריכית עם תוחלת 60 דקות). לשני סוגי החולים הסתברות שווה, א-פריורי. אדם מסויים מטופל כבר מזה 15 דקות. כמה זמן יש לו עוד להיות מטופל, בתוחלת?

פתרון. נסמן ב-A את המאורע 'החולה קל', וב-X את זמן ההמתנה. אז $P(X > 15|A) = e^{-1}$ ו-$P(X > 15|A^c) = e^{-1/4}$. נתון ש-$P(A) = \frac{1}{2}$, ולכן $P(A|X > 15) = \frac{P(X>15|A)P(A)}{P(X>15)} = \frac{e^{-1}}{e^{-1}+e^{-1/4}}$; כך $P(A^c|X > 15) = \frac{e^{-1/4}}{e^{-1}+e^{-1/4}}$. לאחר שעברו 15 דקות, זמן ההמתנה של חולה קל הוא 15 דקות, ושל חולה קשה הוא 60 דקות, משום שההתפלגות חסרת זכרון. לכן תוחלת זמן ההמתנה היא $\frac{15e^{-1}+60e^{-1/4}}{e^{-1}+e^{-1/4}} \approx \mathbf{45.56}$ דקות.

[הטענה שתוחלת זמן ההמתנה היא $\frac{60+15}{2} = 37.5$ נכונה רק עבור חולה שעדיין איננו יודעים שטופל במשך 15 דקות. בוודאי שאין לחסר מזמן זה את 15 הדקות שחלפו.]

3. מספר הכדורים הלבנים בכד מתפלג פואסונית עם פרמטר λ. מה תוחלת מספר הכדורים שיש להוציא עד שנתקלים בכדור השחור - עם החזרה? בלי החזרה?

פתרון. נסמן ב-X את מספר הכדורים הלבנים, כך ש-$X \sim P(\lambda)$. נסמן ב-Y את מספר הכדורים שיש להוציא עד לקבלת הכדור השחור. בדגימה עם החזרה, מדובר בניסויים בלתי תלויים ו-$(Y|X) \sim G(\frac{1}{X+1})$. לכן $E(Y) = E(E(Y|X)) = E(X+1) = \lambda + \mathbf{1}$.
דגימה ללא החזרה שקולה לסידור הכדורים באקראי, ואז Y הוא מקומו של הכדור השחור

בחור, כלומר $(Y|X) \sim U[1, X+1]$. לכן $E(Y) = E(E(Y|X)) = E(\frac{X+2}{2}) = \mathbf{\frac{1}{2}\lambda + 1}$.

[כרגיל בשאלות דומות, תשובות רבות היו תלויות ב־k, n או X; התשובה צריכה להיות תלויה בפרמטר λ בלבד.

שימו לב שההתפלגות ההיפרגאומטרית $\mathrm{Hyp}(X, 1; n)$ מודדת כמה כדורים לבנים עולים בגורל בהוצאת n כדורים (והתוחלת שלה שווה להסתברות להוציא את הכדור הלבן, משום שיש רק כדור אחד), אבל זה אינו רלוונטי לשאלה **כמה** כדורים יש להוציא עד לכדור הלבן.]

4. במערכת חשמלית מורכבת מפעילים נורות קצרות־חיים, שזמן הפעולה של כל אחת מהן מתפלג מעריכית עם תוחלת של שניה אחת. הנורות פועלות בזו אחר זו. מה הסיכוי ש־1000 נורות תפעלנה 1050 שניות או יותר? ומה הסיכוי שפעולה של 1000 שניות תצרוך 1050 נורות או יותר?

פתרון. נסמן ב־$X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ את זמן הפעולה של הנורה ה־i. לכל i, $E(X_i) = 1$, $V(X_i) = 1$. נסמן $Y = X_1 + \cdots + X_{1000}$; לפי משפט הגבול המרכזי $Y \sim N(1000, 1000)$ בקירוב. הסיכוי לכך ש־1000 נורות תפעלנה 1050 שניות או יותר הוא $P(Y > 1050) = P(\frac{Y-1000}{\sqrt{1000}} > \frac{1050-1000}{\sqrt{1000}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}) \approx 1-\Phi(1.581) \approx \mathbf{0.057}$.
מאידך, פעולה של 1000 שניות צורכת 1050 אם ורק אם פעולת 1050 נורות נמשכת 1000 שניות או פחות; נסמן $Y' = X_1 + \ldots + X_{1050} \sim N(1050, 1050)$; הסיכוי לזה הוא $P(Y' < 1000) = P(\frac{Y'-1050}{\sqrt{1050}} < \frac{1000-1050}{\sqrt{1050}} = -\frac{5\sqrt{42}}{21}) \approx \Phi(-1.543) \approx \mathbf{0.061}$.

אגב, מספר הנורות שיפעלו במשך 1000 שניות מתפלג פואסונית עם פרמטר 1000 (וכך גם עבור 1050), אלא שכדי להעריך את ההסתברויות עדיין נדרש משפט הגבול המרכזי.

5. המשתנים $X_0, X_1, \ldots$ מתפלגים ברנולי $b(\frac{1}{2})$ והם בלתי תלויים. הגדר סדרת מרקוב $Y_0, Y_1, \ldots$ שתאפשר לך להתייחס למשתנה T, המודד את זמן ההמתנה עד להופעה הראשונה של הרצף 0011 (משמאל לימין).

(א) תאר במפורש את המצבים של התהליך, והגדר מתי Y_n מקבל כל ערך אפשרי, במונחי הסדרה $\{X_i\}$.

(ב) מהן הסתברויות המעבר? (במטריצה, בגרף או בדרך מוגדרת־היטב אחרת)

(ג) הגדר במדוייק את המשתנה המקרי T. מה התוחלת שלו?

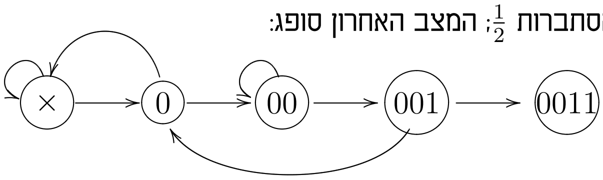
פתרון.

(א) לתהליך Y_n חמישה מצבים: '$\times$', '0', '00', '100', '1100':

$$Y_n = \begin{cases} 0 & X_n = 0, \text{ and } n = 0 \text{ or } X_{n-1} = 1 \\ 00 & X_n = X_{n-1} = 0 \\ 001 & X_n = 1, X_{n-1} = X_{n-2} = 0 \\ 0011 & X_n = X_{n-1} = 1, X_{n-2} = X_{n-3} = 0 \\ \times & \text{אחרת.} \end{cases}$$

[שימו לב: התבקשתם להגדיר את הסדרה החדשה, במונחי הסדרה X_n. יש להגדיר באופן כזה שמן הסדרה X_n אפשר יהיה לחשב האם $Y_{14} = 00$ או לא. רבים שגו וסימנו ב־$Y_0, \dots, Y_4$ את המצבים השונים, או את התוחלות המותנות של T, או גם זה וגם זה.]

(ב) כל חץ מייצג הסתברות $\frac{1}{2}$; המצב האחרון סופג:



(ג) $T = \min\{n\colon Y_n = 0011\}$. המשתנים $t_a = E(T|Y_0 = a)$, מקיימים את מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} t_\times &= 1 + \frac{1}{2}t_\times + \frac{1}{2}t_0 \\ t_0 &= 1 + \frac{1}{2}t_{00} + \frac{1}{2}t_\times \\ t_{00} &= 1 + \frac{1}{2}t_{00} + \frac{1}{2}t_{001} \\ t_{001} &= 1 + \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_{0011} \\ t_{0011} &= 0; \end{aligned}$$

שפתרונה $t_\times = 16,\ t_0 = 14,\ t_{00} = 10,\ t_{001} = 8, t_{0011} = 0$. לכן $E(T) = \frac{1}{2}E(T|Y_0 = \times) + \frac{1}{2}E(T|Y_0 = 0) = 15$. לפי הגדרת T, תוחלת מספר המטבעות שיש להטיל עד לקבלת הרצף היא 16, משום שהתחלנו את הספירה ב־$n = 0$.