חשבון אינפיניטסימלי

עוזי וישנה

11 באוקטובר 2021

חשבון אינפיניטיסימלי

מהדורה 0.78

תוכן עניינים

פרק 1

המספרים הממשיים

הקורס שלנו הוא קורס מבוא לאנליזה. מטרתו רחבה יותר: ללמד קפדנות מתמטית, טיעונים לוגיים, ואמנות ההוכחה המדוייקת. התלמיד צריך לשלוט בשני היבטים של כל נושא: התאורטי והטכני.

האובייקט המרכזי בקורס הזה הוא הישר הממשי. זהו אובייקט מוכר: כל קו ישר הוא מודל לישר הממשי. לכן חשוב במיוחד להבדיל בין מה שנראה נכון אינטואיטיבית, לבין מה שאנחנו יכולים להוכיח. בפרק הראשון נעסוק במספרים הממשיים מכמה זוויות: בשדה, כקבוצה סדורה, וכמרחב טופולוגי.

1.1 שדה המספרים הממשיים

שדה המספרים הממשיים ניתן לאיפיון אקסיומטי. זו אינה תופעה שכיחה במתמטיקה. בדרך כלל מערכת אקסיומות מתארת משפחה רחבה של אובייקטים, ומשפחות חשובות מובילות לתאוריות רחבות שנהנות ממספר רב של דוגמאות. שדה הממשיים, לעומת זאת, הוא **השדה הסדור הארכימדי השלם** היחיד. בסעיפים הבאים נבהיר מהו שדה, מהו שדה סדור, מתי שדה סדור הוא ארכימדי, ומהי אותה שלמות המופיעה בהגדרה.

1.1.1 שדות

את ההגדרה של שדה פגשתם מן הסתם בקורס באלגברה לינארית.

הגדרה 1.1.1 *שדה הוא קבוצה עם שתי פעולות בינאריות (שאנו מסמנים ב־"+" ("חיבור") ו־"$\cdot$" (כפל)) ועם שני קבועים (שאנו מסמנים ב־0 ו־1), כך ש:*

1. *תכונות החיבור:*

   (א) *החיבור אסוציאטיבי,*

   (ב) *0 הוא איבר נייטרלי: $x+0=0+x=x$.*

   (ג) *לכל איבר x קיים "נגדי" y כך ש־$x+y=y+x=0$.*

   (ד) *החיבור קומוטטיבי.*

2. *תכונות הכפל:*

   (א) *הכפל אסוציאטיבי,*

(ב) 1 הוא איבר נייטרלי: $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

(ג) לכל איבר $x \neq 0$ קיים "הפכי" y כך ש־$xy = yx = 1$.

(ד) הכפל קומוטטיבי.

3. דיסטריבוטיביות: $x(y+z) = xy + xz$; $(x+y)z = xz + yz$.

דוגמא 1.1.2 שדה המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ הוא שדה.

יש גם שדות אחרים: המספרים הממשיים (שטרם הגדרנו), המספרים המרוכבים (שגם אותם עוד לא הגדרנו), ועוד. גם המספרים עם פעולות מודולו p, כאשר p מספר ראשוני, מהווים שדה.

תרגיל 1.1.3 (✓) האיבר היחיד המקיים $e + x = x$ לכל x הוא $e = 0$; האיבר היחיד המקיים $ex = x$ לכל x הוא $e = 1$.

תרגיל 1.1.4 (✓) הנגדי של x יחיד, ולכן אפשר לסמן אותו ב־$-x$.

תרגיל 1.1.5 (✓) תכונות אלמנטריות של הנגדי: $0 = -0$, $x = -(-x)$; $-(x+y) = (-x) + (-y)$; $-(xy) = (-x)y = x(-y)$, $(-x)(-y) = xy$.

תרגיל 1.1.6 (✓) אפשר לצמצם בחיבור: אם $a+b = a+c$ אז $b = c$. בפרט אם $a+b = a$ אז $b = 0$.

תרגיל 1.1.7 (✓) ההפכי של x יחיד, ולכן אפשר לסמן אותו ב־x^{-1}.

תרגיל 1.1.8 (✓) תכונות אלמנטריות של ההפכי: $1 = 1^{-1}$, $x = (x^{-1})^{-1}$; $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

תרגיל 1.1.9 (✓) אפשר לצמצם בכפל: אם $ab = ac$ ו־$a \neq 0$ אז $b = c$.

תרגיל 1.1.10 (✓) תמיד $0x = 0$. **הדרכה.** $0x = (0+0)x = 0x + 0x$.

תרגיל 1.1.11 (✓) אין הפכי ל־0.

הגדרה 1.1.12 *שדה הוא בעל מאפיין אפס אם הקבוצה* $0, 1, 1+1, 1+1+1, \cdots$ *אינסופית.*

(לכל שדה יש מאפיין, שהוא או אפס או מספר ראשוני; אבל אין לנו צורך בזה כאן).

הערה 1.1.13 יהי F שדה ממאפיין אפס.

1. הקבוצה $\mathbb{N}_F = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \cdots\}$ סגורה לחיבור ולכפל, ומקיימת את האקסיומות הרגילות של המספרים הטבעיים.
2. הקבוצה $\mathbb{Z}_F = \{a, -a : a \in \mathbb{N}\}$ סגורה לחיבור ולכפל, ויש בה נגדי לכל איבר. זוהי קבוצת המספרים השלמים.
3. הקבוצה $\mathbb{Q}_F = \{xy^{-1} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$ היא תת־שדה של F.

יתרה מזו, המבנים האלה אינם תלויים בשדה (אם F, F' אז $\mathbb{Q}_F$ איזומורפי, כשדה, ל־$\mathbb{Q}_{F'}$).

לכן אנחנו מסמנים ב־$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, ואיננו מציינים את F.

מסקנה 1.1.14 שדה הוא בעל מאפיין אפס אם ורק אם הוא מכיל עותק של $\mathbb{Q}$.

במלים אחרות, $\mathbb{Q}$ הוא השדה הקטן ביותר ממאפיין אפס, משום שהוא מוכל בכל שדה אחר ממאפיין אפס.

הנה עובדה שלא נוכיח בקורס שלנו:

עובדה 1.1.15 קיימים שדות ממאפיין אפס.

מסקנה 1.1.16 שדה הרציונליים קיים. חוג המספרים השלמים קיים. החוג־למחצה של המספרים הטבעיים קיים.

1.1.2 שדות סדורים

יחס סדר חזק הוא יחס בין זוגות של אברים המקיים שתי אקסיומות:

1. אם $x < y$ ו־$y < z$ אז $x < z$ ("טרנזיטיביות"), וכן
2. לעולם לא מתקיים $x < x$ ("אי־רפקלסיביות").

אם $<$ הוא יחס סדר חזק, אז $y > x$ הוא סימון שקול ל־$x < y$; $x \not< y$ מסמן את השלילה הלוגית של הטענה $x < y$; ו־$x \leq y$ הוא קיצור ל"$x < y$ או $x = y$".

תרגיל 1.1.17 (✓) אם $<$ הוא יחס סדר חזק, אז מ־$x < y$ נובע $y \not< x$.

תרגיל 1.1.18 (✓) אם $<$ הוא יחס סדר חזק, אז היחס $\leq$ טרנזיטיבי, ומ־$x \leq y \leq x$ נובע $x = y$.

נזכיר שיחס סדר הוא **לינארי** אם כל שני אברים ניתנים בו להשוואה: לכל x, y מתקיים $x < y$, $x = y$ או $x > y$. (הקשר למרחבים לינאריים הוא רק בזה ששני המונחים נגזרים מן המלה line, כלומר קו ישר).

הגדרה 1.1.19 *שדה נקרא **שדה סדור** אם בנוסף לפעולות החיבור והכפל מוגדר עליו יחס סדר חזק לינארי $<$, המקיים את האקסיומות הבאות:*

1. *אם $y < z$ אז $x + y < x + z$.*
2. *אם $y < z$ ו־$0 < x$ אז $xy < xz$.*

כרגיל, מסמנים $x \leq y$ אם $x < y$ או $x = y$.

תרגיל 1.1.20 (✓) אם $x < y$ ו־$z < u$ אז $x + z < y + u$. **הדרכה**. $x + z < x + u < y + u$.

תרגיל 1.1.21 (✓) אם $y \leq z$ אז $x + y \leq x + z$. אם $y \leq z$ ו־$0 \leq x$ אז $xy \leq xz$.

איבר של שדה סדור הוא **חיובי** אם הוא גדול מאפס, **ושלילי** אם הוא קטן מאפס. מהלינאריות נובע שכל איבר הוא או חיובי, או שלילי, או אפס.

תרגיל 1.1.22 (✓) $x > 0$ אם ורק אם $-x < 0$. **הדרכה.** אחרת $-x, x > 0$ ואז $0 = (-x) + x > 0$, בסתירה.

תרגיל 1.1.23 (✓) סכום של אברים חיוביים הוא חיובי. מכפלה של אברים חיוביים היא חיובית.

תרגיל 1.1.24 (✓) $a < b$ אם ורק אם $0 < b - a$.

תרגיל 1.1.25 אם $a < b$ ו־$c < 0$ אז $bc < ac$.

תרגיל 1.1.26 (✓) תמיד $0 \leq x^2$. בפרט $0 < 1$. **הדרכה.** אם $x > 0$ התכונה נובעת מהאקסיומה. אם $x \leq 0$ אז $x^2 = (-x)^2 \geq 0$.

תרגיל 1.1.27 (✓) בשדה סדור לא קיים איבר גדול ביותר.

תרגיל 1.1.28 שדה סדור מוכרח להיות בעל מאפיין אפס. **הדרכה.** $0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots$ ולכן המספרים האלה שונים זה מזה.

יש שדות רבים (ממאפיין אפס), מהם ניתנים לסידור ומהם שאינם ניתנים לסידור. יש גם שדות סדורים רבים, שונים זה מזה.

הערה 1.1.29 לפי תרגיל 1.1.26, כל סכום של ריבועים הוא חיובי, אבל -1 שלילי. לכן בשדה סדור -1 אינו יכול להיות סכום של ריבועים. לפי משפט ארטין־שרייר גם ההיפך נכון: כל שדה שבו -1 אינו סכום ריבועים, ניתן לסידור.

הערך המוחלט

בעוד שהסדר הכללי בשדה הסדור מתאר רק את המקום היחסי על ציר המספרים, הסדר של מספרים חיוביים הוא גם בעל משמעות של גודל.

תרגיל 1.1.30 (✓) אין מספר חיובי קטן ביותר.

יהי F שדה סדור. מגדירים $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$.

טענה 1.1.31 תמיד מתקיים: $|a| \geq 0$.
$||a|| = |a|$.
$|-a| = |a|$.
$|ab| = |a|\,|b|$.

תרגיל 1.1.32 (✓) $|x| \leq y$ אם ורק אם $-y \leq x \leq y$.

טענה 1.1.33 (אי־שוויון המשולש) לכל $a, b \in F$,

$$|a + b| \leq |a| + |b|\,.$$

הוכחה. לפי ההגדרה $-|a| \le a \le |a|$ ו־$-|b| \le b \le |b|$. לכן $-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$ ולפי תרגיל 1.1.32 נובע מזה ש־$|a + b| \le |a| + |b|$.

תרגיל 1.1.34 (✓) $||a| - |b|| \le |a - b|$.

טענה 1.1.35 (אי־השוויון האריתמטי־גאומטרי (לפעוטות)) לכל $a, b \in F$,

$$ab \le (\frac{a+b}{2})^2.$$

הוכחה. הפרש האגפים שווה ל־$\frac{a^2-2ab+b^2}{4} = (\frac{a-b}{2})^2 \ge 0$. □

תרגיל 1.1.36 (✓) הוכח או הפרך: $\max\{a,b\}\max\{c,d\} \le \max\{ac,bd\}$ לכל $a,b,c,d > 0$.

1.1.3 קטעים

יהי F שדה סדור.

הגדרה 1.1.37 *לקבוצות הבאות שמות מיוחדים:*

- ***קטע פתוח:*** $(a,b) = \{x \in F:\ a < x < b\}$.
- ***קטע מעורב:*** $(a,b] = \{x \in F:\ a < x \le b\}$ **או** $[a,b) = \{x \in F:\ a \le x < b\}$.
- ***קטע סגור:*** $[a,b] = \{x \in F:\ a \le x \le b\}$.
- ***קרן פתוחה:*** $(a,\infty) = \{x \in F:\ a < x\}$ **או** $(-\infty,a) = \{x \in F:\ x < a\}$.
- ***קרן סגורה:*** $[a,\infty) = \{x \in F:\ a \le x\}$ **או** $(-\infty,a] = \{x \in F:\ x \le a\}$.

בכל אלה מניחים ש־$a < b$. **קטע** הוא שם משותף לקטעים פתוחים, מעורבים או סגורים. מההגדרה נובע ש־$[a,a] = \{a\}$, אבל נקודה אינה נחשבת לקטע.

תרגיל 1.1.38 ההצגה של קטע, באחת הצורות לעיל, היא יחידה. כלומר, אם $(a,b) = (c,d)$ אז $a = c$ ו־$b = d$, לא יתכן ש־$(a,b) = [c,d]$, וכדומה. **הדרכה.** נניח ש־$(a,b) = (c,d)$, ונניח בשלילה ש־$a < c$. נסמן ב־m את הקטן מבין b, c, אז $\frac{a+m}{2} \in (a,b)$ בעוד ש־$\frac{a+m}{2} \notin (c,d)$, וזו סתירה.

תרגיל 1.1.39 (✓) בכל קטע פתוח יש אינסוף נקודות.

תרגיל 1.1.40 (✓) אם כל אחת מהקבוצות A, B היא קטע פתוח או קרן פתוחה (או הקבוצה הריקה), אז גם החיתוך $A \cap B$ כזה.

תרגיל 1.1.41 (✓) אם $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$ אז I הוא קטע.

תרגיל 1.1.42 (✓) איחוד וחיתוך אינסופיים יכולים לשנות את טיפוס הקטע:

$$\bigcup_{\epsilon>0}[a+\epsilon, b-\epsilon] = (a,b);$$

$$\bigcap_{\epsilon>0}(a-\epsilon, b+\epsilon) = [a,b].$$

הגדרה 1.1.43 *הקוטר של קטע I כך ש־$(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$ הוא ההפרש $b-a$. מסמנים את הקוטר ב־$\operatorname{diam} I$.*

תרגיל 1.1.44 (✓) אם $I \subseteq J$ הם קטעים, אז $\operatorname{diam} I \le \operatorname{diam} J$. אם בנוסף לזה J פתוח, אז $\operatorname{diam} I < \operatorname{diam} J$.

הגבול העליון והתחתון של סדרת קבוצות

כדי להתרגל לאיחוד וחיתוך מסובכים, יש להכיר את כללי דה־מורגן

$$(\bigcup A_\lambda)^{\mathrm{c}} = \bigcap A_\lambda^{\mathrm{c}}, \qquad (\bigcap A_\lambda)^{\mathrm{c}} = \bigcup A_\lambda^{\mathrm{c}},$$

ואת ההגדרות של "הגבול העליון" של סדרת קבוצות,

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \{x :\ (\exists^\infty n)\, x \in A_n\},$$

שהיא הקבוצה הכוללת נקודות השייכות לאינסוף קבוצות בסדרה; ובדומה לזה "הגבול התחתון",

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \{x :\ (\exists n_0)(n > n_0 \implies x \in A_n)\},$$

שהיא הקבוצה הכוללת את הנקודות השייכות לכל אברי הסדרה ממקום מסויים ואילך. בהמשך נפגוש את הגבול העליון והתחתון של סדרת מספרים, שלהם משמעות אחרת.

תרגיל 1.1.45 (✓) $\liminf_n A_n^{\mathrm{c}} = (\limsup_n A_n)^{\mathrm{c}}$.

1.1.4 קבוצות חסומות

יהי F שדה סדור.

חסם מלעיל ומלרע

הגדרה 1.1.46 *איבר $x \in F$ הוא **חסם מלעיל** של קבוצה $A \subseteq F$ אם $a \le x$ לכל $a \in A$. אפשר לכתוב בקיצור $A \le x$.*
*בדומה לזה, איבר $x \in F$ הוא **חסם מלרע** של קבוצה $A \subseteq F$ אם $x \le a$ לכל $a \in A$. אפשר לכתוב בקיצור $x \le A$.*

תרגיל 1.1.47 (✓) לכל קבוצה A נסמן $-A = \{-a :\ a \in A\}$. אז $A \le x$ אם ורק אם $-x \le -A$.

חשוב שנדע לנסח גם מתי טענה כמו $A \le x$ אינה נכונה:

תרגיל 1.1.48 (✓) $A \not\le x$ אם ורק אם קיים $a \in A$ כך ש־$x < a$.

קבוצה שיש לה חסם מלעיל נקראת **קבוצה חסומה מלעיל**. כך מגדירים גם **קבוצה חסומה מלרע**. כשאומרים "קבוצה חסומה" מתכוונים לפעמים לקבוצה שהיא חסומה גם מלעיל וגם מלרע, ולפעמים לקבוצה החסומה רק באחד הצדדים. המשמעות תלויה בהקשר; החיים קשים.

תרגיל 1.1.49 ($\checkmark$) הקבוצה הריקה חסומה גם מלעיל וגם מלרע ("באופן ריק", משום שהטענה המדברת על כל האברים אינה חלה כאן אפילו על איבר אחד).

תרגיל 1.1.50 ($\checkmark$) אם x חסם מלעיל של A, אז כל $x < x'$ גם הוא חסם מלעיל.

דוגמא 1.1.51 כל קטע (פתוח, סגור או מעורב) הוא חסום מלעיל ומלרע: $a \leq [a,b] \leq b$.

תרגיל 1.1.52 ($\checkmark$) קבוצה היא חסומה (משני העברים) אם ורק אם היא מוכלת בקטע.

מינימום ומקסימום

הגדרה 1.1.53 ***איבר $x \in F$ הוא מקסימום של הקבוצה $A \subseteq F$ אם $A \geq x$ ו־$x \in A$.***
איבר $x \in F$ הוא מינימום של הקבוצה $A \subseteq F$ אם $A \leq x$ ו־$x \in A$.

על פי ההגדרה, לקבוצה הריקה אין מינימום או מקסימום. גם לשדה כולו אין מינימום או מקסימום.

תרגיל 1.1.54 ($\checkmark$) לכל קבוצה סופית יש מינימום ומקסימום.

תרגיל 1.1.55 ($\checkmark$) אם יש לקבוצה מקסימום, אז הוא יחיד. אם יש לקבוצה מינימום, אז הוא יחיד. (לכן מדברים על המינימום והמקסימום של קבוצה, בהא הידיעה).

את המינימום והמקסימום של הקבוצה A, אם הם קיימים, מסמנים ב־$\max A$, $\min A$.

דוגמא 1.1.56 לקטע הסגור $[a,b]$ יש מינימום ומקסימום.

זהירות 1.1.57 יכול שלקבוצה לא יהיה מקסימום, גם אם היא חסומה מלעיל; ולא יהיה מינימום, גם אם היא חסומה מלרע. למשל, הקטע $(0,1)$ חסום מלעיל ומלרע, אבל אין לו מינימום ומקסימום.

נאמר ש־a הוא **האיבר המינימלי** בקבוצה אם הוא המינימום שלה, **והאיבר המקסימלי** אם הוא המקסימום שלה.

זהירות 1.1.58 בקבוצות סדורות כלליות יש הבדל בין "מינימום" ו"איבר מינימלי". מותר לנו לבלבל בין המושגים משום שבקבוצה סדורה לינארית הם מתלכדים.

אם יש לקבוצה מקסימום, קל לזהות אותו:

תרגיל 1.1.59 ($\checkmark$) $x = \max A$ אם ורק אם $x \in A$ ולכל $a \in A$ מתקיים $a \leq x$.

אבל איך מוכיחים שאין לקבוצה מקסימום?

טענה 1.1.60 הטענות הבאות שקולות:

1. לקבוצה A אין מקסימום.
2. לכל $a \in A$ יש $b \in A$ כך ש־$a < b$.

הוכחה. הטענה (2) נכתבת בצורה לוגית כך: $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a < b)$. היפוך הטענה הזו הוא $(\exists a \in A)(\forall b \in A)(b \leq a)$, וזו בדיוק הטענה שקיים ל־A איבר מקסימלי. $\square$

חסם עליון ותחתון

הגדרה 1.1.61 *תהי $A \subseteq F$ קבוצה לא ריקה. האיבר המינימלי בין החסמים מלעיל (אם הוא קיים) נקרא* ***החסם העליון*** *של A.*
בדומה, האיבר המקסימלי בין החסמים מלרע (אם הוא קיים) נקרא ***החסם התחתון****.*

כדי לומר ש־x החסם העליון של A, כותבים $x = \sup A$ (sup הוא קיצור של המלה supremum, גדול ביותר בלטינית). בדומה לזה, כותבים $x = \inf A$ כדי לומר ש־x הוא החסם התחתון (inf הוא קיצור של infimum, קטן ביותר).

תרגיל 1.1.62 (✓) תהיינה $A \subseteq B$ קבוצות, אז $\sup A \leq \sup B$.

תרגיל 1.1.63 (✓) $-\inf A = \sup(-A)$.

זהירות 1.1.64 נזכיר שוב שמשמעות השוויון $x = \sup A$ היא "לקבוצה A קיים חסם עליון, והוא x". אין לקרוא בקלות דעת "x שווה לחסם העליון" לפני שהוכחנו שהחסם העליון קיים.

זהירות 1.1.65 אם A אינה חסומה מלעיל, מסמנים $\sup A = \infty$; ואם A אינה חסומה מלרע, מסמנים $\inf A = -\infty$. לסימונים אלה משמעות שונה מאשר לטענה שהחסם העליון או התחתון הם מספרים סופיים. בהשוואה לכך, לעולם לא נכתוב $\max A = \infty$, משום שאינסוף אינו איבר בשדה.

טענה 1.1.66 התנאים הבאים שקולים:

1. $x = \sup A$.
2. $A \leq x$, וכן $x \leq y \implies A \leq y$.
3. $x \leq y \iff A \leq y$.
4. $A \leq x$, וכן $A \nleq y \implies y < x$.
5. $A \leq x$, וכן $(\forall y < x)(\exists a \in A)(y < a)$.
6. $A \leq x$, וכן לכל $\epsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$x - \epsilon < a$.

תרגיל 1.1.67 (✓) $\sup(a, b) = b$.

תרגיל 1.1.68 (✓) לכל קטע I, $\sup\{|x - y| \,:\, x, y \in I\} = \mathrm{diam} I$ (ראה הגדרה 1.1.43).

1.1.5 שלמות ביחס לחסמים

הגדרה 1.1.69 *שדה סדור מקיים את* ***אקסיומת החסם העליון*** *אם לכל קבוצה חסומה מלעיל בשדה יש חסם עליון.*

שדה המקיים את אקסיומת החסם העליון הוא **שלם ביחס לחסמים**.

תרגיל 1.1.70 (✓) נסח את "אקסיומת החסם התחתון", והראה שהשתיים שקולות זו לזו.

שדה המספרים הרציונליים אינו מקיים את אקסיומת החסם העליון. זו הסיבה לכך שאנו נאלצים לדבר על מספרים ממשיים. כדי לראות זאת, נפתח בעובדה שהיתה ידועה כבר לפיתגוראים לפני 2400 שנה.

טענה 1.1.71 אין מספר רציונלי המקיים $r^2 = 2$.

הוכחה. אחרת, כתוב $r = \frac{a}{b}$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$. אם שניהם זוגיים, אפשר לצמצם, ולהגיע (באינדוקציה) למצב שבו לא שניהם זוגיים. כעת $br = a$, וכשנעלה בריבוע נקבל $2b^2 = a^2$. מכאן ש־a זוגי. נכתוב $a = 2a'$ ונקבל $b^2 = 2a'^2$. מכאן שגם b זוגי, בסתירה להנחה. $\square$

טענה 1.1.72 בכל שדה סדור F, אם לקבוצה $A = \{a \in F\colon\ a^2 < 2\}$ יש חסם עליון $p = \sup A$, אז הוא מקיים $p^2 = 2$.

הוכחה. ברור ש־$1 \le p \le 2$, משום ש־$1 \in A$ ו־$A \le 2$. נניח שהטענה אינה נכונה. אז יש שתי אפשרויות:

1. $p^2 < 2$. נסמן $\delta = 2 - p^2$. אז $\delta < 1$, ו־$(p + \frac{1}{5}\delta)^2 = p^2 + \frac{2}{5}p\delta + \frac{1}{25}\delta^2 \le p^2 + \frac{21}{25}\delta < 2$, כלומר $p + \frac{1}{5}\delta \in A$, בסתירה להנחה ש־$p$ חסם מלעיל.
2. $p^2 > 2$. שוב נסמן $\delta = p^2 - 2$. אז $(p - \frac{1}{4}\delta)^2 = p^2 - \frac{p\delta}{2} + \frac{\delta^2}{16} > p^2 - \delta = 2$ ולכן $p - \frac{1}{4}\delta > A$ בסתירה להנחה ש־p חסם מלעיל מינימלי.

$\square$

טענה 1.1.73 הקבוצה $A = \{a \in \mathbb{Q}\colon\ a^2 < 2\}$ חסומה, אבל אין לה חסם עליון בשדה המספרים הרציונליים.

הוכחה. הקבוצה חסומה משום ש־$A \le 2$. אם $p = \sup A$ אז לפי טענה 1.1.72 מתקיים $p^2 = 2$, וזה סותר את טענה 1.1.71. $\square$

מסקנה 1.1.74 שדה המספרים הרציונליים אינו שלם.

לעומת זאת,

הערה 1.1.75 בשדה סדור שלם F יש שורש ריבועי ל־2: הרי $p = \sup\{a \in \mathbb{R}\colon\ a^2 < 2\}$ קיים כי הקבוצה חסומה והשדה שלם; ולפי טענה 1.1.72 מתקיים $p^2 = 2$.

1.1.6 ארכימדיות

כאמור לעיל, שדה סדור הוא בעל מאפיין אפס, ולכן הוא מכיל עותק של המספרים הרציונליים, שבתוכו יש עותק של המספרים הטבעיים.

טענה 1.1.76 התכונות הבאות של שדה סדור שקולות זו לזו:

1. לכל איבר $0 < x$ בשדה קיים n טבעי כך ש־$\frac{1}{n} < x$.
2. לכל איבר x בשדה קיים n טבעי כך ש־$x < n$.
3. הקבוצה $\mathbb{Q}$ אינה חסומה.
4. לכל $0 < x, y$ קיים n טבעי כך ש־$y < nx$.

הוכחה. $(2) \implies (1)$: קח n טבעי כך ש־$\frac{1}{n} < x^{-1}$, ואז $x < n$. $(4) \implies (2)$: הפעל את ההנחה על $\frac{y}{x}$. $(3) \iff (2)$: ברור. $(1) \implies (4)$: קח $y = 1$. □

הגדרה 1.1.77 *שדה סדור המקיים את התכונות השקולות לעיל הוא שדה סדור **ארכימדי**.*

שדות ארכימדיים נקראים כך על שם ארכימדס מסירקוז, גדול המדענים של העולם העתיק, שהבחין כי בכל סרגל, קטן ככל שיהיה, אפשר למדוד כל מרחק, גדול ככל שיהיה. זהו, בניסוח מודרני, התנאי (4) לעיל.

יש שדות סדורים רבים, מהם ארכימדיים ומהם לא ארכימדיים. יש גם שדות סדורים ארכימדיים רבים, שונים זה מזה.

דוגמא 1.1.78 שדה המספרים הרציונליים הוא ארכימדי.

דוגמא 1.1.79 (דוגמא לשדה סדור לא ארכימדי) נתבונן **בשדה הפונקציות הרציונליות** $F = \mathbb{Q}(t) = \left\{\frac{f(t)}{g(t)} : \ f, g \in \mathbb{Q}[t]\right\}$, שאבריו הם המנות של פולינומים עם מקדמים רציונליים. נגדיר את יחס הסדר כך ש־$\frac{f(t)}{g(t)} > 0$ אם היחס בין המקדמים העליונים של הפולינומים הוא חיובי. לפי יחס הסדר הזה, $\mathbb{Q} < t$ ולכן השדה אינו ארכימדי.

טענה 1.1.80 ארכימדיות עוברת בתורשה לתת־שדות. היינו, אם $F \subseteq K$ שדות ו־K ארכימדי, אז גם F ארכימדי.

הוכחה. הרי אם $\mathbb{Q}$ אינו חסום בשדה הגדול, בוודאי שאינו חסום בשדה הקטן. □

כעת אפשר לנסח מחדש את תרגיל 1.1.42:

תרגיל 1.1.81 (✓) בשדה ארכימדי,

$$\bigcup_n [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] = (a, b);$$

$$\bigcap_n (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) = [a, b].$$

1.1.7 צפיפות

יהיו $F \subseteq K$ שדות סדורים. אומרים ש־F **צפוף** ב־K אם בכל קטע פתוח של K יש איבר של F. כלומר, לכל $a < b$ ב־K יש $x \in F$ כך ש־$a < x < b$.

טענה 1.1.82 אם F צפוף ב־K אז בכל קטע פתוח של K יש אינסוף אברים של F.

הוכחה. יהי (a, b) קטע ב־K. אם יש בו מספר סופי של אברים של F אז יש בו איבר מינימלי של F, נאמר $x \in (a, b) \cap F$, אבל לפי הצפיפות יש אברים של F גם בקטע (a, x) המוכל ב־(a, b), בסתירה למינימליות. □

טענה 1.1.83 נניח ש־$F \subseteq L \subseteq K$ שדות סדורים. אז F צפוף ב־K אם ורק אם F צפוף ב־L ו־L צפוף ב־K.

הוכחה. **נניח ש־F צפוף ב־K. אם $a, b \in L$ ו־$a < b$ אז יש בקטע $(a,b)_K$ אברים של F, ולכן F צפוף ב־L. בכל קטע של K יש אברים של F שהם גם אברים של L, ולכן L צפוף ב־K. כעת נניח את ההיפך: F צפוף ב־L ו־L צפוף ב־K. יהי (a,b) קטע ב־K. לפי טענה 1.1.82 יש בקטע שתי נקודות של L, וביניהן נקודה של F.** $\square$

טענה 1.1.84 שדה הרציונליים צפוף בשדה סדור F אם ורק אם F ארכימדי.

הוכחה. **אם $\mathbb{Q} \subseteq F$ צפוף, אז $\mathbb{Q}$ אינו יכול להיות חסום שם, משום שאם $a < \mathbb{Q}$ אז $\mathbb{Q} < a < a+1$ ובקטע $(a, a+1)$ אין רציונליים.**

כעת נניח ש־F ארכימדי. יהיו $a < b$ אברים של F. לפי הארכימדיות יש מספר טבעי n כך ש־$\frac{1}{n} < b - a$. לפי הארכימדיות יש מספר טבעי m כך ש־$m > na$. לכן יש מספר טבעי מינימלי כזה. כלומר, m כך ש־$m - 1 \leq na < m$. כעת $a < \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b$. $\square$

1.1.8 שדה הממשיים

משפט 1.1.85 *שדה שלם ביחס לחסמים הוא ארכימדי.*

הוכחה. **אחרת הקבוצה $\mathbb{Q}$ חסומה, ולפי האקסיומה יש לה חסם עליון, נאמר z. אבל אם z חסם עליון של $\mathbb{Q}$, אז $z - 1$ חסם עליון של $\mathbb{Q} - 1 = \mathbb{Q}$, וזו סתירה.** $\square$

משפט 1.1.86 *אם $F \subseteq K$ שני שדות סדורים, כך ש־F שלם ביחס לחסמים ו־K ארכימדי, אז $F = K$.*

הוכחה. **יהי $a \in K$. נתבונן בקבוצה $A = \{x \in F :\ x < a\}$. לפי הארכימדיות של K, יש מספר טבעי n כך ש־$A < a < n$. לכן A חסומה כתת־קבוצה של F, ומכיוון ששדה זה שלם ביחס לחסמים, יש ל־A חסם עליון ב־F, שנסמן ב־$z = \sup A$. כעת, אם $z < a$, אז יש n טבעי כך ש־$\frac{1}{n} < x - z$ ואז $z + \frac{1}{n} \in A$, בסתירה להגדרת z. מאידך אם $a < z$ אז קיים n טבעי כך ש־$\frac{1}{n} < z - a$, ואז $z - \frac{1}{n} \notin A$, שוב סתירה. מכאן ש־$a = z \in F$.** $\square$

מסקנה 1.1.87 אם $F \subseteq K$ שדות שלמים ביחס לחסמים, אז הם שווים.

עובדה 1.1.88 יש בניה המחזירה עבור כל שדה סדור ארכימדי F, שדה סדור ארכימדי שלם $\widehat{F}$ המכיל את F; וכך שאם $F \subseteq K$ שדות ארכימדיים, אז $\widehat{F} \subseteq \widehat{K}$.

הערה 1.1.89 מכיוון ששדה שלם ביחס לחסמים הוא בפרט ארכימדי, בניה כעין זו אינה אפשרית אלא אם F ארכימדי מלכתחילה, והרי בטענה 1.1.80 ראינו שארכימדיות עוברת בתורשה לתת־שדות.

מכיוון ש־$\mathbb{Q}$ הוא שדה ארכימדי, השדה $\widehat{\mathbb{Q}}$ הוא שדה ארכימדי שלם! השדה הזה הוא **שדה המספרים הממשיים**, ומסמנים אותו ב־$\mathbb{R}$. לעת עתה השדה שבחרנו לסמן ב־$\mathbb{R}$ תלוי באופן שבו בונה עובדה 1.1.88 שדות שלמים. עלינו להראות שהשדה הזה אינו תלוי בבניה.

טענה 1.1.90 אם F ארכימדי שלם, אז $\widehat{F} = F$. בפרט, לכל שדה ארכימדי F מתקיים $\widehat{\widehat{F}} = \widehat{F}$.

הוכחה. מסקנה **1.1.87, שהרי $F \subseteq \widehat{F}$.** $\square$

מסקנה 1.1.91 שדה סדור F הוא ארכימדי אם ורק אם הוא מוכל ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. מחד, יהי $F \subseteq \mathbb{R}$. מכיוון ש־$\mathbb{R}$ הוא שדה סדור שלם, הוא ארכימדי; ו־F ארכימדי משום שתכונה זו עוברת בתורשה לתת שדות.

מאידך, יהי F שדה סדור ארכימדי. אז $\mathbb{Q} \subseteq F$, ולכן $\widehat{F} \subseteq \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, אבל שני השדות שלמים ולפי מסקנה 1.1.87 הם שווים. והרי $F \subseteq \widehat{F} = \mathbb{R}$. □

משפט 1.1.92 *$\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור הארכימדי השלם היחיד.*

הוכחה. יהי F שדה ארכימדי שלם. לפי מסקנה 1.1.91, $F \subseteq \mathbb{R}$. לפי טענה 1.1.87 יוצא ש־$F = \mathbb{R}$. □

הערה 1.1.93 מכיוון ש־$\widehat{F}$ ארכימדי, $\mathbb{Q}$ צפוף בו, אבל $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \widehat{F}$, ולכן F צפוף ב־$\widehat{F}$.

מסקנה 1.1.94 בפרט, $\mathbb{Q}$ צפוף ב־$\mathbb{R}$.

מטרת כל הפרק הזה היא לאפשר לנו לענות לשאלה: "מהו מספר ממשי"? התשובה היא – איבר של שדה המספרים הממשיים. זו אינה תשובה מעגלית, משום שאנחנו לא מגדירים את שדה המספרים הממשיים בתור "קבוצת המספרים הממשיים" עם פעולות של שדה, אלא בתור ההשלמה של שדה המספרים הרציונליים. איזו השלמה? לפי משפט 1.1.92, זה לא משנה. מהו באמת מספר ממשי? תלוי באופן שבו בונים את השדה הזה בבניה 1.1.88. נחזור לכך בהמשך.

1.2 הטופולוגיה של הממשיים

ניתן לדלג בקריאה ראשונה.

כעת נשתמש בקטעים כדי להגדיר מבנה נוסף על שדה המספרים הממשיים.

קבוצות קמורות

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא **קמורה** אם לכל $x, y \in A$ ולכל z, אם $x < z < y$ אז $z \in A$.

תרגיל 1.2.1 ($\checkmark$) קבוצה A היא קמורה אם ורק אם לכל $x, y \in A$ מתקיים $[a, b] \subseteq A$.

מושג הקמירות מאפשר לנו לזהות איזה קבוצות הן קטעים.

טענה 1.2.2 כל קטע הוא קבוצה קמורה.

משפט 1.2.3 *כל קבוצה קמורה היא אחד מהבאים:*

1. *הקבוצה הריקה,*
2. *נקודה,*
3. *קטע,*
4. *קרן,*
5. *הישר כולו.*

הוכחה. תהי A קבוצה קמורה. עלינו לטפל בארבעה מקרים.

1. **הקבוצה חסומה משני העברים. נסמן $a = \inf A$ ו־$b = \sup B$. אז $(a, b) \subseteq A \subseteq [a, b]$.**

2. **הקבוצה חסומה מלרע אבל לא מלעיל. נסמן $a = \inf A$. אז $(a, \infty) \subseteq A \subseteq [a, \infty)$.**

3. **הקבוצה חסומה מלעיל אבל לא מלרע. כמו בסעיף הקודם.**

4. **הקבוצה אינה חסומה, לא מלעיל ולא מלרע. אז $A = \mathbb{R}$.**

□

1.2.1 קבוצות פתוחות

קטע פתוח המכיל נקודה x נקרא **סביבה** של הנקודה (נוח יותר להגיד "לכל נקודה יש סביבה המקיימת..." מאשר "לכל נקודה יש קטע פתוח המכיל אותה ומקיים...").

הגדרה 1.2.4 *קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}$ היא **פתוחה** אם לכל $x \in U$ קיימת סביבה המוכלת בקבוצה: $x \in I \subseteq U$.*

תרגיל 1.2.5 (✓) קבוצה היא פתוחה אם ורק אם היא איחוד של קטעים פתוחים.

דוגמא 1.2.6 הקבוצה הריקה פתוחה. השדה כולו פתוח. כל קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה.

דוגמא 1.2.7 קבוצה סופית אינה פתוחה.

טענה 1.2.8 חיתוך של שתי קבוצות פתוחות הוא פתוח.

טענה 1.2.9 איחוד משפחה כלשהי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

1.2.2 קבוצות סגורות

הגדרה 1.2.10 *קבוצה A היא **סגורה** אם המשלים שלה A^{c} הוא קבוצה פתוחה.*

זהירות 1.2.11 קבוצה אינה דלת. קבוצה יכולה להיות פתוחה וסגורה, פתוחה אבל לא סגורה, סגורה ולא פתוחה, או לא פתוחה ולא סגורה.

תרגיל 1.2.12 (✓) מצא את כל הקבוצות שהן גם פתוחות וגם סגורות.

תרגיל 1.2.13 (✓) קבוצה A היא סגורה אם ורק אם לכל $x \notin A$ יש סביבה I הזרה ל־A.

טענה 1.2.14 חיתוך משפחה כלשהי של קבוצות סגורות הוא סגור.

טענה 1.2.15 איחוד של שתי קבוצות סגורות הוא סגור.

תרגיל 1.2.16 (✓) כל קבוצה סופית היא סגורה.

1.2.3 קבוצות קומפקטיות

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. אוסף $\mathcal{V}$ של קבוצות פתוחות נקרא **כיסוי פתוח** של A אם $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$. תת־אוסף $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ הוא **תת־כיסוי** אם הוא כיסוי בעצמו.

הגדרה 1.2.17 *קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}$ היא **קומפקטית** אם לכל כיסוי פתוח שלה יש תת־כיסוי סופי.*

זהירות 1.2.18 קבוצה היא קומפקטית אם <u>לכל</u> כיסוי פתוח שלה יש תת־כיסוי סופי. אין די בכך שלקבוצה יש כיסוי סופי (לכל קבוצה יש כיסוי פתוח: $\{\mathbb{R}\}$).

דוגמא 1.2.19 הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו קומפקטי, משום שהאוסף $\mathcal{V} = \{(0, 1-1/n)\}$ מכסה אותו, ואין לו תת־כיסוי סופי.

טענה 1.2.20 כל קבוצה קומפקטית היא חסומה (משני הצדדים).

הוכחה. **האוסף $\mathcal{V} = \{(-n,n)\}$ מכסה כל קבוצה משום שהאיחוד שלו הוא כל הישר. קבוצה שיש לה תת־כיסוי סופי מוכלת בקטע.** □

טענה 1.2.21 כל קבוצה קומפקטית היא סגורה.

הוכחה. **תהי K קבוצה קומפקטית. כדי להוכיח שהמשלים K^c קבוצה פתוחה, תהי $a \notin K$; עלינו להראות שיש סביבה של a הזרה ל־K. לכל $x \in K$ נבחר קטעים פתוחים וזרים I_x, J_x כך ש־$x \in I_x$ ו־$a \in J_x$. האוסף $\{I_x : x \in K\}$ הוא כיסוי של K, ולפי הקומפקטיות יש לו תת־כיסוי פתוח $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$. החיתוך $J = J_{x_1} \cap \dots \cap J_{x_n}$ הוא סביבה של a, הזרה ל־K משום שלכל $x \in K$, אם $x \in I_{x_i}$ אז $x \notin J_{x_i}$.** □

משפט היינה־בורל (2.3.33) מראה שגם ההיפך נכון: כל קבוצה סגורה וחסומה היא קומפקטית. עובדה חשובה זו, שנוכיח בעזרת תכונות של סדרות מונוטוניות, תספק הוכחות מהירות לכמה משפטים מרכזיים בתורת הפונקציות הרציפות.

פרק 2

סדרות

2.1 מבוא

הגדרה 2.1.1 *פונקציה מקבוצת המספרים הטבעיים נקראת סדרה. מקובל לסמן את כל אברי הסדרה באותה אות, עם אינדקס המציין את המקום בסדרה, כגון*

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots).$$

בדרך כלל נעסוק בסדרות של מספרים ממשיים. את אוסף הסדרות מעל הממשיים מסמנים ב־$\mathbb{R}^\omega$.

סדרות אפשר לחבר ולהכפיל בסקלר איבר־איבר:

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n),\\ c(a_n) &= (ca_n).\end{aligned}$$

פעולות אלה הופכות את $\mathbb{R}^\omega$ למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. אכן, איבר האפס הוא הסדרה הקבועה $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$.

אפשר להכפיל סדרות באותו אופן:

$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n).$$

הסדרה הקבועה $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ היא איבר היחידה. מרחב הסדרות הממשיות מקיים את כל האקסיומות של שדה מלבד קיום ההפכי לכפל.

הערה 2.1.2 מרחב וקטורי שמוגדרת בו פעולת כפל אסוציאטיבית, דיסטריבוטיבית ועם איבר יחידה, נקרא **אלגברה קומוטטיבית**.

(שדה מקיים בנוסף לזה רק עוד תכונה אחת - קיום ההפכי לכל איבר. באלגברת הסדרות לא כל האברים הפיכים, ולכן היא אינה שדה.)

תרגיל 2.1.3 **(✓)** הראה ש־$\mathbb{R}^\omega$ הוא אלגברה קומוטטיבית.

2.1.1 סדרות חסומות

אומרים שסדרה (a_n) היא **סדרה חסומה**, אם הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots\}$ חסומה (מלעיל ומלרע).

תרגיל 2.1.4 **(✓)** אוסף הסדרות החסומות סגור לחיבור ולכפל.

אוסף הסדרות החסומות, שאותו מסמנים ב־ℓ^∞, הוא **תת־אלגברה** של אוסף הסדרות.

2.2 גבולות של סדרות

2.2.1 התכנסות לערך סופי

הגדרה 2.2.1 *הסדרה (a_n) **מתכנסת לנקודה** a אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שאם $n \geq N$ אז $|a_n - a| < \epsilon$. במקרה זה הנקודה a **נקראת הגבול של הסדרה**, וכותבים $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. כאשר האינדקס השואף לאינסוף ברור מההקשר, כותבים גם בקיצור $a = \lim a_n$ או $a_n \longrightarrow a$.*
בניסוח פורמלי,

$$\lim a_n = a \iff (\forall\epsilon > 0)(\exists N)(\forall n)(n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

תרגיל 2.2.2 (✓) לו היינו מחליפים את התנאי $n \geq N$ בתנאי $n > N$, או את התנאי $|a_n - a| < \epsilon$ בתנאי $|a_n - a| \leq \epsilon$, היינו מקבלים את אותה הגדרה. לעומת זאת, לו היינו מחליפים את התנאי $\epsilon > 0$ בתנאי $\epsilon \geq 0$, היינו מקבלים הגדרה אחרת לגמרי, לפיה סדרה "מתכנסת" ל־a רק אם כל אבריה ממקום מסויים ואילך שווים ל־a.

הערה 2.2.3 תהי $P(x)$ תכונה של מספרים (פורמלית **תכונה** היא תת־קבוצה $P \subseteq \mathbb{R}$, וכותבים $P(x)$ במקום $x \in P$). נאמר שהסדרה (a_n) **מקיימת לבסוף את** P אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $P(a_n)$.

באותו אופן תכונה של זוג מספרים (שהיא תת־קבוצה של $\mathbb{R}^2$) מתקיימת לבסוף עבור זוג סדרות $(a_n), (b_n)$ אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $P(a_n, b_n)$, וכן הלאה.

בניסוח זה, הסדרה מתכנסת ל־a אם לכל $\epsilon > 0$ היא מקיימת לבסוף את התנאי $P(x) = (|x - a| < \epsilon)$.

טענה 2.2.4 אם סדרה מקיימת לבסוף את התכונה P, ומקיימת לבסוף את התכונה Q, אז היא מקיימת לבסוף את התכונה $P \wedge Q$ (כלומר P וגם Q).

הוכחה. **לפי ההנחה קיים N' כך שאם $n \geq N'$ אז $P(a_n)$; וקיים N'' כך שאם $n \geq N''$ אז $Q(a_n)$; ניקח $N = \max\{N', N''\}$, ואז אם $n \geq N$ מתקיימים גם $P(a_n)$ וגם $Q(a_n)$.** □

טענה 2.2.5 לסדרה לא יכולים להיות שני גבולות. כלומר, אם קיים גבול, הוא יחיד.

הוכחה. **נניח ש־a, b שניהם גבולות של הסדרה (a_n). נבחר $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$. קיים N גדול מספיק כך ש־$|a_N - b| < \epsilon$, $|a_n - b|$, אבל אז $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a - b|$, וזו סתירה.** □

הגדרה 2.2.6 *סדרה שיש לה גבול נקראת סדרה מתכנסת. סדרה שאין לה גבול נקראת סדרה מתבדרת.*

תרגיל 2.2.7 (✓) כתוב בניסוח פורמלי את הטענות הבאות:

1. הסדרה (a_n) מתכנסת.
2. הסדרה (a_n) אינה מתכנסת.

טענה 2.2.8 כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה. **נניח ש־$\ell = \lim a_n$. לפי ההגדרה קיים N כך שאם $n \geq N$ אז $|a_n - \ell| \leq 1$. אז לכל n מתקיים**

$$\min\{a_1, \ldots, a_{n-1}, \ell - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \ldots, a_{n-1}, \ell + 1\}.$$

□

2.2.2 התכנסות לאינסוף

אינטואיטיבית, ההתנהגות של סדרה מתכנסת מובנת לנו, ואילו ההתנהגות של סדרה מתבדרת עשויה להיות פרועה ומסובכת. עם זאת, יש סוג מיוחד של סדרות מתבדרות שכביכול "מתכנסות לאינסוף".

הגדרה 2.2.9 *נאמר שהסדרה* (a_n):

- ***מתכנסת לאינסוף*** *אם לכל* M *קיים* N *כך שאם* $n \geq N$ *אז* $a_n > M$.
- ***מתכנסת למינוס אינסוף*** *אם לכל* M *קיים* N *כך שאם* $n \geq N$ *אז* $a_n < M$.

במקרים אלה כותבים $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, בהתאמה.

אומרים שסדרה **מתכנסת במובן הרחב** אם היא מתכנסת למספר סופי, או לפלוס או מינוס אינסוף.

למה 2.2.10 תהי A קבוצה לא ריקה עם $c = \sup A$. אז יש סדרה של אברים של A המתכנסת ל־c.

הוכחה. נטפל בשני מקרים. אם c סופי, אז לכל n קיים איבר $a_n \in A$ כך ש־$c - \frac{1}{n} < a_n \leq c$, ולפי משפט הסנדוויץ' $a_n \to c$.

אם $\sup A = \infty$ אז לכל n קיים איבר $a_n \in A$ כך ש־$n < a_n$, ואז $\lim a_n \geq \lim n = \infty$. □

2.2.3 אריתמטיקה של גבולות

תרגיל 2.2.11 (✓) $a_n \to a$ אם ורק אם $a_n - a \to 0$.

משפט 2.2.12 *תהיינה* (a_n) *ו־*(b_n) *סדרות מתכנסות. יהי* c *סקלר כלשהו. אז הסדרות* $(a_n) + (b_n)$, $c(a_n)$ *ו־*$(a_n)(b_n)$ *מתכנסות, ומתקיים*

$$\begin{aligned}\lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n,\\ \lim(ca_n) &= c\lim a_n,\\ \lim(a_n b_n) &= \lim a_n \lim b_n.\end{aligned}$$

הוכחה. נסמן $a = \lim a_n$ ו־$b = \lim b_n$.

1. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים N' כך שאם $n \geq N'$ אז $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$; וקיים N'' כך שאם $n \geq N''$ אז $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. כעת נבחר $N = \max\{N', N''\}$; אם $n \geq N$ אז $|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
2. בחר בסדרה הקבועה $(b_n) = (c, c, \dots)$ בסעיף 3.
3. ראשית, קיים N_0 כך שאם $n \geq N_0$ אז $|a_n - a| < 1$, ואז $|a_n| \leq |a| + 1$. כעת יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים N' כך שאם $n \geq N'$ אז $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b|+1)}$; וקיים N'' כך שאם $n \geq N''$ אז $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)}$. כעת נבחר $N = \max\{N_0, N', N''\}$; אם $n \geq N$ אז

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b|\\ &\leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b|\\ &< (|a|+1)\frac{\epsilon}{2(|a|+1)} + \frac{\epsilon}{2(|b|+1)}|b| < \epsilon.\end{aligned}$$

□

הערה 2.2.13 הראינו שאוסף הסדרות המתכנסות הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^\omega$, וסגור לכפל. לכן הוא מהווה "תת־אלגברה" של $\mathbb{R}^\omega$. אופרטור הגבול ממנה ל־$\mathbb{R}$ מהווה "הומומורפיזם של אלגברות".

טענה 2.2.14 נניח ש־(a_n) סדרה מתכנסת שגבולה אינו אפס. אז גם $(1/a_n)$ מתכנסת, ו־$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$.

הוכחה. נסמן $\ell = \lim a_n$. מכיוון שזהו הגבול, לבסוף מתקיים כי $|a_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה וההערה הפותחת, לבסוף מתקיים כי $|a_n - \ell| < |\ell|^2 \epsilon/2$. לכן $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|a_n-\ell|}{|a_n||\ell|} < \frac{2|a_n-\ell|}{|\ell|^2} < \epsilon$. □

משפט 2.2.15 *תהי (a_n) סדרה המתכנסת ל־0, ו־(b_n) סדרה חסומה. אז גם (a_nb_n) מתכנסת לאפס.*

הוכחה. לפי ההנחה קיים M כך שלכל n מתקיים $|b_n| \leq M$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה, לבסוף מתקיים $|a_n| < \frac{\epsilon}{M}$, ולכן לבסוף $|a_nb_n| \leq \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$. □

ההתנהגות באינסוף

טענה 2.2.16 תהי (a_n) סדרה חיובית. אז $a_n \to \infty$ אם ורק אם $\frac{1}{a_n} \to 0$.

הוכחה. ראשית נניח ש־$a_n \to \infty$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה מתקיים לבסוף $a_n > \frac{1}{\epsilon}$, ולכן לבסוף $\frac{1}{a_n} < \epsilon$. בכיוון ההפוך, אם $a_n \to 0$, יהי M מספר כלשהו. לפי ההנחה מתקיים לבסוף $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}$, ולכן מתקיים לבסוף $a_n > M$. □

טענה 2.2.17 אם $\lim a_n = \pm\infty$ ו־(b_n) סדרה חסומה, אז $\lim(a_n + b_n) = \pm\infty$.

מסקנה 2.2.18 אם $\lim a_n = \lim b_n = \infty$, אז $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

טענה 2.2.19 אם $\lim a_n = \pm\infty$ ו־(b_n) סדרה חסומה הרחק מאפס, אז $\lim(a_nb_n) = \pm\infty$.

2.3 סדרות והישר הממשי

2.3.1 גבולות וסדר

אפשר להגדיר יחס סדר על סדרות, אם כי (שלא כמו יחס הסדר על מספרים) הוא אינו לינארי. נאמר ש־$(a_n) \leq (b_n)$ אם לבסוף מתקיים $a_n \leq b_n$.

תרגיל 2.3.1 ($\checkmark$) היחס שהוגדר על סדרות הוא טרנזיטיבי ורפלקסיבי (אבל אינו אנטי־סימטרי, ולכן אינו יחס סדר).

טענה 2.3.2 אם $(a_n) \leq (b_n)$ ושתי הסדרות מתכנסות, אז $\lim a_n \leq \lim b_n$.

הוכחה. נסמן $a = \lim a_n$ ו־$b = \lim b_n$. נניח, בשלילה, ש־$b < a$. לפי ההנחה קיים N כך שאם $n \geq N$ אז $|a_n - a|, |b_n - b| \leq \frac{a-b}{2}$, אבל אז $b_n = b + (b_n - b) < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < a - (a - a_n) = a_n$, וזו סתירה להנחה. □

מסקנה 2.3.3 תהי (a_n) סדרה מתכנסת. אם $a_n \le x$ לכל n, אז $\lim a_n \le x$. בדומה לזה, אם $x \le a_n$ לכל n, אז $x \le \lim a_n$.

הוכחה. קח $(b_n) = (x, x, \dots)$ בטענה 2.3.2. הטענה השניה דומה. $\square$

מסקנה 2.3.4 יהי I קטע סגור. אם (a_n) סדרה מתכנסת שכל רכיביה בקטע, אז גם הגבול שייך לקטע.

תרגיל 2.3.5 ($\checkmark$) מסקנה 2.3.3 אינה נכונה עבור יחס הסדר החזק; מכך שכל האברים של סדרה מתכנסת הם חיוביים ממש, אי אפשר להסיק שגם הגבול חיובי ממש (לדוגמא, $\frac{1}{n} \to 0$). מסיבה זו, גם מסקנה 2.3.4 אינה נכונה לקטעים פתוחים.

משפט 2.3.6 (משפט הסנדוויץ') *נניח שלבסוף־* $a_n \le b_n \le c_n$, *ונניח ש־* $\lim a_n = \lim c_n$. *אז גם הסדרה* b_n *מתכנסת, ולאותו גבול.*

הוכחה. נסמן $x = \lim a_n$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה, מתקיים לבסוף כי $|a_n - x|, |c_n - x| < \epsilon$. כלומר, $x - \epsilon < a_n \le b_n \le c_n < x + \epsilon$, ואז $|b_n - x| < \epsilon$. כלומר, לבסוף מתקיים $|b_n - x| < \epsilon$. $\square$

למשפט זה יש גם גרסה המתאימה להתבדרות לאינסוף:

טענה 2.3.7 נניח שלבסוף $a_n \ge b_n$, וש־$b_n \to \infty$. אז גם $a_n \to \infty$.

הוכחה. יהי M מספר כלשהו. לפי ההנחה מתקיים לבסוף $a_n \ge b_n \ge M$. $\square$

2.3.2 סדרות מונוטוניות

הגדרה 2.3.8 *סדרה* (a_n) *היא מונוטונית עולה אם היא מקיימת* $a_1 \le a_2 \le \cdots$; *ומונוטונית יורדת אם היא מקיימת* $a_1 \ge a_2 \ge \cdots$. *סדרה מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת נקראת סדרה מונוטונית.*

נאמר שסדרה מונוטונית היא חסומה אם היא חסומה משני העברים (בעובדה שסדרה מונוטונית עולה חסומה מלרע אין רבותא: היא חסומה על־ידי a_1; הסדרה חסומה אם ורק אם היא חסומה מלעיל; וכן עבור סדרה מונוטונית יורדת).

משפט 2.3.9 *כל סדרה מונוטונית וחסומה – מתכנסת.*

הוכחה. די להוכיח את הטענה עבור סדרה מונוטונית עולה (a_n). מכיוון שהסדרה חסומה, יש לה חסם עליון $a = \sup a_n$. נראה ש־$a = \lim a_n$. יהי $\epsilon > 0$. לפי הגדרת החסם העליון, קיים N כך ש־$a - \epsilon < a_N \le a$. לכל $n \ge N$ מתקיים $a - \epsilon < a_N \le a_n \le a$, ולכן $0 \le a - a_n < \epsilon$. בפרט $|a_n - a| < \epsilon$. $\square$

הערה 2.3.10 ההוכחה מראה שנקודת הגבול של סדרה מונוטונית עולה גדולה או שווה לכל איבר שלה.

תרגיל 2.3.11 ($\checkmark$) יהי $0 < \gamma < 1$. הראה ש־$\gamma^n \to 0$. **הדרכה**. הסדרה מונוטונית יורדת, וחסומה מלרע. לכן היא מתכנסת לערך a, אבל ברור ש־$\gamma a = a$.

2.3.3 תת־סדרות

תהי $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ סדרה. **לכל סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים** $n_1 < n_2 < \cdots$, הסדרה $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ נקראת **תת־סדרה** של (a_n).

זהירות 2.3.12 סדרת האינדקסים היוצרת תת־סדרה חייבת לעלות ממש. לדוגמא, $(a_4, a_4, a_4, \dots)$ אינה נחשבת לתת־סדרה של $(a_1, a_2, \dots)$.

תרגיל 2.3.13 (✓) תת־סדרה של תת־סדרה היא תת־סדרה.

הגדרה 2.3.14 *כל גבול של תת־סדרה מתכנסת של (a_n) נקרא **גבול חלקי** של הסדרה (a_n).*

דוגמא 2.3.15 הסדרה $(0, 1, 0, 1, \dots)$ אינה מתכנסת. עם זאת, יש לה שתי תת־סדרות קבועות, המתכנסות אחת ל־0 והשניה ל־1. יש לה גם תת־סדרות רבות שאינן מתכנסות.

טענה 2.3.16 אם (a_n) סדרה מתכנסת, כל הגבולות החלקיים שלה שווים זה לזה.

הוכחה. נסמן $\ell = \lim a_n$. תהי (a_{n_k}) תת־סדרה של הסדרה הנתונה. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - \ell| < \epsilon$, ואז לכל $k > N$ מתקיים $n_k \geq k > N$ ולכן $|a_{n_k} - \ell| < \epsilon$. □

טענה 2.3.17 תהי (a_n) סדרה מונוטונית. אם יש לה תת־סדרה מתכנסת, הסדרה עצמה מתכנסת לאותו גבול.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות שהסדרה עולה. תהי a_{n_k} תת־סדרה מתכנסת, ונסמן את גבולה ב־ℓ. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה יש K כך שאם $k > K$ אז $\ell - \epsilon < a_{n_k} \leq \ell$. לכל $n > n_{K+1}$ מתקיים $\ell - \epsilon < a_{n_{K+1}} \leq a_n \leq \ell$. □

תרגיל 2.3.18 (✓) סדרה מונוטונית, שיש לה תת־סדרה חסומה, היא חסומה בעצמה.

תרגיל 2.3.19 (✓) יהי p קבוע. נניח שלכל הסדרות (a_{pn+t}) יש אותו גבול. אז (a_n) מתכנסת גם היא לאותו גבול.

תרגיל 2.3.20 (✓) אם לכל תת־סדרה של (a_n) יש תת־סדרה המתכנסת לגבול ℓ, אז $a_n \to \ell$. **הדרכה**. אחרת קיים $\epsilon > 0$ כך שאינסוף אברים בסדרה מקיימים $|a_n - \ell| \geq \epsilon$.

תרגיל 2.3.21 (✓) הטענה הבאה אינה נכונה (השווה לתרגיל 2.3.20): אם לכל תת־סדרה של (a_n) יש תת־סדרה מתכנסת, אז (a_n) מתכנסת.

תרגיל 2.3.22 (✓) התכונות הבאות שקולות עבור סדרה (a_n).

1. הסדרה אינה חסומה מלעיל;
2. לסדרה יש תת־סדרה המתכנסת לאינסוף;
3. לסדרה יש תת־סדרה מונוטונית עולה המתכנסת לאינסוף.

2.3.4 קומפקטיות סדרתית

משפט 2.3.23 (הלמה של קנטור) *תהי $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ סדרת קטעים סגורים מקוננים, כך ש־$\mathrm{diam} I_n \to 0$. אז החיתוך $\bigcap I_n$ הוא נקודון (כלומר קבוצה בת נקודה אחת).*

הוכחה. אפשר לכתוב $I_n = [a_n, b_n]$. לפי ההנחה, $a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_2 \le b_1$. כלומר, הסדרה (a_n) מונוטונית עולה והסדרה (b_n) מונוטונית יורדת, ושתיהן חסומות. לכן יש להן גבולות $a = \lim a_n$ ו־$b = \lim b_n$. אבל ידוע גם ש־$0 = \lim \mathrm{diam} I_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n = b - a$, כלומר $a = b$. לפי ההערה, $a_n \le a = b \le b_n$, כלומר $a = b \in [a_n, b_n] = I_n$ לכל n, ולכן הנקודה שייכת לחיתוך הקטעים.

נותר להוכיח שהנקודה שבחיתוך הקטעים היא יחידה. אם $x \le y$ בחיתוך, אז מתקיים $a_n \le x \le y \le b_n$, ולכן $0 \le y - x \le b_n - a_n \to 0$. לפי מסקנה 2.3.3, $y - x = 0$. □

תרגיל 2.3.24 ($\checkmark$) יהי $I = [a, b]$ קטע. לכל $x \in I$ מתקיים כי $I \subseteq [x - \mathrm{diam} I, x + \mathrm{diam} I]$.
הדרכה. נתון $a \le x \le b$, ולכן $x - (b - a) \le a \le b \le x + (b - a)$.

טענה 2.3.25 תהי $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ סדרת קטעים סגורים מקוננים, כך ש־$\mathrm{diam} I_n \to 0$. נסמן ב־$x = \bigcap I_n$ את נקודת החיתוך שקיומה מובטח על־ידי הלמה של קנטור.
תהי (x_n) סדרה כך ש־$x_n \in I_n$ לכל n. אז $x_n \to x$.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. ממקום מסויים ואילך מתקיים כי $\mathrm{diam} I_n < \epsilon$, ואז

$$x_n \in I_n \subseteq [x - \mathrm{diam} I_n, x + \mathrm{diam} I_n] \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

□

משפט 2.3.26 (משפט בולצאנו־ויירשטראס) *לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת.*

הוכחה. תהי (a_n) סדרה חסומה, כלומר, קיימים b, c כך שלכל n מתקיים $b \le a_n \le c$. נגדיר באינדוקציה סדרת קטעים סגורים $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ שכל אחד מהם מכיל אינסוף מאברי הסדרה (a_n), וסדרת אינדקסים $n_1 < n_2 < \cdots$, כך ש־$a_{n_m} \in I_m$.

נבחר $I_1 = [b, c]$ ו־$n_1 = 1$. עבור $m \ge 1$, נניח שבחרנו קטע I_m המכיל אינסוף מאברי הסדרה (a_n), ואינדקס n_m כך ש־$a_{n_m} \in I_m$. נכתוב $I_m = [b_m, c_m]$, ונתבונן בפירוק $I_m = [b_m, \frac{b_m+c_m}{2}] \cup [\frac{b_m+c_m}{2}, c_m]$. מכיוון שהקטע I_m מכיל אינסוף אברים של הסדרה (a_n), אחד מתת־הקטעים מוכרח להכיל אינסוף אברים שלה, ואנו בוחרים אותו להיות I_{m+1}; כך $I_{m+1} \subset I_m$, כדרוש. אנו בוחרים $n_{m+1} > n_m$ כך ש־$a_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$; אפשר לעשות זאת שהרי בקטע הזה יש אינסוף אברים של הסדרה. לפי הבניה, $\mathrm{diam} I_{m+1} = \frac{1}{2} \mathrm{diam} I_m$. מכאן ש־$\mathrm{diam} I_m = 2^{-(m-1)}(c - b) \to 0$. לפי טענה 2.3.25 תת־הסדרה a_{n_m} מתכנסת אל הנקודה היחידה שבחיתוך $\bigcap I_m$. □

תרגיל 2.3.27 ($\checkmark$) לסדרה שאינה חסומה יש תת־סדרה המתבדרת לאינסוף, או תת־סדרה המתבדרת למינוס אינסוף (ואולי גם זו וגם זו).
מכאן שלכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת במובן הרחב.

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא **קומפקטית סדרתית** אם לכל סדרה של נקודות ב־A יש תת־סדרה המתכנסת לאיבר של A. יחד עם מסקנה 2.3.4, משפט בולצאנו־ויירשטראס קובע שכל קטע סגור הוא קומפקטי סדרתית. המטרה הבאה היא לאפיין קומפקטיות סדרתית.

2.3.5 קבוצות סגורות

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא **סגורה** אם לכל נקודה $x \notin A$ יש קטע פתוח $x \in I$ כך ש־$I \cap A = \varnothing$.

דוגמא 2.3.28 כל קטע סגור הוא קבוצה סגורה. גם כל קרן סגורה היא קבוצה סגורה. איחוד שתי קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה. חיתוך משפחה כלשהי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

טענה 2.3.29 קבוצה A היא סגורה אם ורק אם לכל לכל סדרה מתכנסת $(a_n) \subseteq A$, גם הגבול $\lim a_n \in A$.

הוכחה. ראשית נניח ש־A סגורה. הסדרה מתכנסת לפי ההנחה. אם $x = \lim a_n \notin A$, אז יש $\epsilon > 0$ כך שהקטע $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ זר ל־A, ואם כך אין בו אף נקודה של הסדרה, בסתירה להנחה שאברי הסדרה שייכים ל־A.

כעת נניח שמתקיים התנאי על סגירות לגבול. עלינו להוכיח ש־A סגורה. תהי $x \notin A$. נניח, בשלילה, שלא קיים קטע פתוח סביב x שהוא זר ל־A. אז לכל n יש נקודה $a_n \in A \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, וברור ש־$a_n \to x$, בסתירה להנחה. □

משפט 2.3.30 *קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא קומפקטית סדרתית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.*

הוכחה. תהי A קבוצה קומפקטית סדרתית. היא מוכרחה להיות חסומה, משום שאחרת אפשר לבחור בה סדרה המתכנסת לאינסוף, ולסדרה כזו אין תת־סדרה המתכנסת למספר סופי. כדי להוכיח שהקבוצה סגורה, די להוכיח שלכל סדרה מתכנסת $(a_n) \subseteq A$, הגבול שייך ל־A. אבל לפי הקומפקטיות הסדרתית יש לסדרה זו תת־סדרה המתכנסת לאיבר של A, והסדרה כולה מתכנסת לאותו גבול.

כעת תהי A קבוצה סגורה וחסומה. תהי $(a_n) \subseteq A$ סדרה. לפי משפט בולצאנו־ויירשטראס, לסדרה יש תת־סדרה מתכנסת. לפי טענה 2.3.29, גבולה של תת־הסדרה שייך ל־A. □

קומפקטיות

משפט 2.3.31 *כל קטע סגור ב־$\mathbb{R}$ הוא קומפקטי.*

הוכחה. יהי I_0 קטע סגור. נניח, בשלילה, שהקטע אינו קומפקטי. לכן יש לו כיסוי פתוח $\mathcal{V}$ שאין לו תת־כיסוי סופי. נפרק את הקטע לשני קטעים שווי־אורך. לפי ההנחה, לאחד מהם אי אפשר למצוא תת־כיסוי סופי; נסמן אותו ב־I_1, ונמשיך כך באינדוקציה. בנינו סדרת קטעים סגורים מקוננים שקוטרם שואף לאפס. לפי הלמה של קנטור יש להם נקודה משותפת $x \in I$. הנקודה הזו מכוסה על ידי $U \in \mathcal{V}$, שמכסה את I_n עבור n גדול מספיק, בסתירה להנחה. □

טענה 2.3.32 תת־קבוצה סגורה A של קבוצה קומפקטית K היא בעצמה קומפקטית.

הוכחה. אם $\mathcal{V}$ כיסוי פתוח של A, אז $\mathcal{V} \cup \{A^c\}$ כיסוי פתוח של K, ולפי הקומפקטיות יש לו תת־כיסוי סופי. אחרי שנשמיט את $\{A^c\}$ נקבל תת־כיסוי סופי של $\mathcal{V}$ המכסה את A. □

משפט 2.3.33 (משפט היינה־בורל) קבוצה בישר הממשי היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

הוכחה. הוכחנו בטענות 1.2.21-1.2.20 שקבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה. מאידך, תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה סגורה וחסומה. מכיוון שהיא חסומה, היא מוכלת בקטע סגור. הקטע עצמו קומפקטי לפי משפט 2.3.31. זה מסיים את ההוכחה לפי טענה 2.3.32. □

2.3.6 הגבולות החלקיים

נסמן ב־$\mathrm{LIM}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים (הסופיים) של (a_n).

דוגמא 2.3.34 אם (a_n) סדרה מתכנסת ל־ℓ, אז $\mathrm{LIM}(a_n) = \{\ell\}$. (זו טענה 2.3.16).

טענה 2.3.35 $x \in \mathrm{LIM}(a_n)$ אם ורק אם כל סביבה פתוחה של x כוללת אינסוף מאברי הסדרה.

הוכחה. אם הקבוצה היא גבול חלקי אז יש תת־סדרה המתכנסת אליה, וממילא כל סביבה פתוחה כוללת אינסוף מאברי תת־הסדרה. בכיוון ההפוך אם בכל קטע $(x - 1/n, x + 1/n)$ יש אינסוף מאברי הסדרה, אפשר לבחור נקודה שהאינדקס שלה גדול משל האברים שנבחרו קודם לכן; לפי משפט הסנדוויץ' תת־הסדרה שבנינו מתכנסת ל־x. □

טענה 2.3.36 הקבוצה $\mathrm{LIM}(a_n)$ סגורה.

הוכחה. תהי $x \notin \mathrm{LIM}(a_n)$. לפי ההנחה יש קטע פתוח I סביב x שבו רק מספר סופי של אברי הסדרה. סביב כל נקודה $y \in I$ יש קטע פתוח המוכל ב־I ולכן כולל לכל היותר מספר סופי של אברי הסדרה; ממילא $y \notin \mathrm{LIM}(a_n)$. □

תהי (a_n) סדרה חסומה. לפי טענה 2.3.3 הקבוצה $\mathrm{LIM}(a_n)$ חסומה אף היא. לפי משפט בולצאנו־ויירשטראס, זו קבוצה לא ריקה.

משפט 2.3.37 *תהי (a_n) סדרה חסומה. אז הסדרה $t_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה. גבולה הוא המקסימום של $\mathrm{LIM}(a_n)$.*

הוכחה. הסדרה t_n מונוטונית יורדת משום ש־$\{a_{n+1}, \dots\} \subseteq \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. היא חסומה מלמטה משום ש־(a_n) חסומה מלמטה ו־$a_n \leq t_n$. יש לה גבול לפי משפט 2.3.9. יהי $x \in \mathrm{LIM}(a_n)$. אז יש תת־סדרה $a_{n_k} \to x$, ומאי־השוויונות $a_{n_k} \leq t_{n_k}$ נובע שגם $x = \lim a_{n_k} \leq \lim t_{n_k} = \lim t_n = t$.

כעת נוכיח ש־$t \in \mathrm{LIM}(a_n)$. לכל m יש $n_m \geq m$ כך ש־$t_m - \frac{1}{m} < a_{n_m} \leq t_m$ (איננו יודעים ש־$n_1 < n_2 < \cdots$, ולכן (a_{n_m}) אינה תת־סדרה). מכיוון ש־$n_m \to \infty$, יש לסדרה זו תת־סדרה מונוטונית עולה, נאמר n_{m_k}, ואז $a_{n_{m_k}}$ היא תת־סדרה של (a_n). מ־$t_{m_k} - \frac{1}{m_k} < a_{n_{m_k}} \leq t_{m_k}$ נובע לפי משפט הסנדוויץ' כי $a_{n_{m_k}} \to t$. □

מסיבה זו המקסימום של $\mathrm{LIM}(a_n)$ נקרא **הגבול העליון** של הסדרה, ומסמנים אותו ב־$\limsup a_n$. המינימום של $\mathrm{LIM}(a_n)$ הוא **הגבול התחתון** של הסדרה, ומסמנים אותו ב־$\liminf a_n$.

2.3.7 כמה סדרות מתכנסות

פונקציית **העצרת** מוגדרת לפי $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, ובאינדוקציה $0! = 1$ ו־$n! = n \cdot (n-1)!$. למספר זה משמעות קומבינטורית: מספר הדרכים לסדר n עצמים בשורה הוא $n!$. המנות $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ נקראות **מקדמים בינומיים**. זהו מספר תת־הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n, ומכאן שהמקדמים הבינומיים הם כולם מספרים שלמים. נוסחת **הבינום של ניוטון** קובעת שלכל $x, y \in F$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

אפשר להוכיח זאת באינדוקציה, או על ידי פיתוח ישיר ושיקול קומבינטורי.

טענה 2.3.38 אי־שוויון ברנולי: לכל $x > -1$ ו־n טבעי מתקיים
$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

הוכחה. **(ההוכחה עבור $x \geq 0$ מיידית מהבינום, אבל עלינו להוכיח לכל $x > -1$). באינדוקציה. עבור $n = 0$ אין מה להוכיח. נניח שהטענה נכונה עבור n, אז**
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$
□

טענה 2.3.39 אם $\gamma > 1$ אז $\gamma^n \to \infty$.

הוכחה. $\gamma^n = (1+(\gamma-1))^n \geq 1+n(\gamma-1) \to \infty$. □

טענה 2.3.40 אם $0 < \alpha < 1$ אז $\alpha^n \to 0$.

הוכחה. **מפני ש־$\frac{1}{\alpha} > 1$, הטענה הקודמת מראה ש־$\alpha^{-n} \to \infty$, ולפי טענה 2.2.16 $\alpha^n \to 0$. (תרגיל 2.3.11 מספק הוכחה חלופית).** □

טענה 2.3.41 לכל $c > 0$ מתקיים $c^{1/n} \to 1$.

הוכחה. **נניח ש־$c \geq 1$ (המקרה $0 < c < 1$ נובע מזה מיידית). הסדרה $c^{1/n}$ יורדת וחסומה (על־ידי 1), ולכן יש לה גבול, נאמר p. אם כך, גם לתת־הסדרה $c^{1/2n}$ יש אותו גבול. אבל אז אפשר להעלות את אברי תת־הסדרה בריבוע ולקבל $p = p^2 \leftarrow c^{1/n}$, והפתרון היחיד כאשר $p \geq 1$ הוא $p = 1$.** □

מסקנה 2.3.42 תהי a_n סדרה חיובית חסומה הרחק מאפס, אז $a_n^{1/n} \to 1$.

הוכחה. **מסקנה מטענה 2.3.41 ומשפט הסנדוויץ'.** □

תרגיל 2.3.43 נניח ש־$a_n \to \ell$. הראו שגם $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to \ell$. הראו שגם $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to \ell$ (בהנחה שהסדרה חיובית).

2.4 סדרות קושי

ההגדרה של סדרה מתכנסת דורשת, מלכתחילה, איבר בשדה שיהיה גבול הסדרה. במובן זה, מושג ההתכנסות אינו חל על הסדרה כשלעצמה, אלא על הקשר שלה לשדה שבו היא נמצאת. בסעיף זה נדון במושג קרוב, המתייחס לסדרה בלבד. כדי למצוא את ההשלכות התאורטיות של המושג החדש, נניח באופן זמני שאנחנו עוסקים בשדה סדור כלשהו, F.

הגדרה 2.4.1 *סדרה $(a_n) \subseteq F$ **היא סדרת קושי אם לכל** $\epsilon > 0$ **בשדה יש מספר טבעי** K **כך שאם** $n, m \geq K$ **אז** $|a_n - a_m| < \epsilon$.*

תרגיל 2.4.2 (✓) כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

תרגיל 2.4.3 (✓) סדרת קושי שיש לה תת־סדרה מתכנסת, מתכנסת כולה.

תרגיל 2.4.4 (✓) אם סדרת קושי אינה מתכנסת לאפס, אז יש $\epsilon > 0$ כך שהיא נמנעת לבסוף מהקטע $(-\epsilon, \epsilon)$.

תרגיל 2.4.5 (✓) נאמר שסדרה היא "קושי בקושי" (hardly Cauchy) אם לכל $\epsilon > 0$ יש K כך שאם $K < n < m \leq 2n$ אז $|a_n - a_m| < \epsilon$. הראו (מעל הממשיים) שסדרה היא סדרת קושי אם ורק אם היא קושי בקושי.

2.4.1 שלמות ביחס לסדרות

הגדרה 2.4.6 *שדה הוא **שלם ביחס לסדרות** אם כל סדרת קושי מתכנסת.*

משפט 2.4.7 *שדה סדור הוא שלם לפי חסמים אם ורק אם הוא ארכימדי ושלם לפי סדרות.*

הוכחה. שדה שלם במובן של חסמים הוא ארכימדי לפי משפט 1.1.85.
נניח ש־(x_n) סדרת קושי; לכל i נסמן ב־t_i את החסם התחתון של הקבוצה $\{x_i, x_{i+1}, \dots\}$. לפי תרגיל 1.1.62, הסדרה $\{t_1, t_2, \dots\}$ מונוטונית עולה. נסמן ב־t את הגבול העליון (כלומר החסם העליון) שלה. לכל n קיים i כך ש־ $t - 1/n < t_i \le t$, וקיים m_n כך ש־$t_i \le x_{m_n} < t_i + 1/n$. לכן $t - 1/n < x_{m_n} < t + 1/n$, ותת־הסדרה x_{m_n} מתכנסת ל־t. לכן גם הסדרה (x_n) מתכנסת לאותו גבול.
כעת נניח ש־F שדה סדור ארכימדי, שהוא שלם במובן של סדרות. תהי A קבוצה חסומה מלעיל. לכל n, קיים t_n שהוא חסם מלעיל של הקבוצה, כך ש־$t_n - 1/n$ אינו חסם מלעיל (קיומו של איבר כזה נובע מן הארכימדיות). כלומר, לכל n יש $x_n \in A$ כך ש־$x_n \le t_n \le x_n + \frac{1}{n}$, ואז לכל n, m מתקיים $t_n \le x_n + \frac{1}{n} \le t_m + \frac{1}{n}$. היינו $-\frac{1}{m} \le t_n - t_m \le \frac{1}{n}$, ו־$|t_n - t_m| \le \frac{1}{\min n,m}$. מכאן שסדרה זו היא סדרת קושי, וקל להוכיח שגבולה הוא חסם עליון של A. □

תרגיל 2.4.8 (✓) נאמר שסדרה בשדה סדור F היא "סדרת קושי חלשה" אם לכל M טבעי יש מספר טבעי N כך שאם $n, m \ge N$ אז $|a_n - a_m| < \frac{1}{M}$. כל סדרת קושי היא סדרת קושי חלשה. בשדה ארכימדי המושגים מתלכדים. שדה הוא שלם במובן של חסמים אם ורק אם הוא ארכימדי וכל סדרת קושי מתכנסת; אם ורק אם הוא ארכימדי וכל סדרת קושי חלשה מתכנסת.

מסקנה 2.4.9 בשדה המספרים הממשיים, כל סדרת קושי מתכנסת.

כעת אנו יכולים להשלים את הפרטים עבור עובדה 1.1.88, ואף יותר.
יהי F שדה סדור. נגדיר על אוסף סדרות קושי מעל F יחס שקילות, לפי $(a_n) \sim (b_n)$ אם $a_n - b_n \to 0$. נסמן ב־$\widehat{F}$ את אוסף מחלקות השקילות של סדרות קושי מעל F לגבי היחס הזה. החיבור והכפל של מחלקות מוגדר היטב, לפי החיבור והכפל של סדרות קושי. מתקבל שדה (ההפכי לאיבר שונה מאפס מתקבל בעזרת תרגיל 2.4.4). השדה סדור לפי היחס "$[(a_n)] \le [(b_n)]$ אם $a_n \le b_n$ לבסוף". הוא שלם ביחס לסדרות (זה דורש בניית אלכסון מוכלל בסדרת הסדרות). הסדרות הקבועות מהוות עותק של F בתוך $\widehat{F}$. אם $F \subseteq K$ אז $\widehat{F} \subseteq \widehat{K}$ כי כל סדרת קושי ב־F היא גם סדרת קושי ב־K. לבסוף, אם F ארכימדי, גם $\widehat{F}$ ארכימדי ולכן שלם ביחס לחסמים.
בזאת את הוכחנו באופן מלא את המשפט:

משפט 2.4.10 *קיים שדה סדור ארכימדי שלם יחיד.*

פרק 3

טורים

סכום סופי מוגדר באינדוקציה בעזרת הסכום של שני מספרים. אינדוקציה אינה יכולה להגדיר סכום אינסופי, וכדי לטפל בכאלו אנו לומדים בסעיף זה טורים, שהם ביטויים מהצורה $a_1 + a_2 + \cdots$ או $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1 התכנסות של טורים

הגדרה 3.1.1 *הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ הוא **טור מתכנס** (במובן הרחב) אם סדרת הסכומים החלקיים $\sum_{k=1}^{k=n} a_k$ היא סדרה מתכנסת (במובן הרחב). במקרה זה, גבול הסדרה הוא **הסכום של הטור**.*

זהירות 3.1.2 הביטוי $\sum a_n$ מציין את הטור, וגם את סכומו של הטור אם הטור מתכנס. מותר לבצע פעולות אריתמטיות (לרבות השוואה) בטור $\sum a_n$ רק לאחר שידוע כי הוא מתכנס.

דוגמא 3.1.3 הטור ההנדסי $\sum \gamma^n$ מתכנס (ל־$\frac{1}{1-\gamma}$) אם $-1 < \gamma < 1$; מתבדר לאינסוף אם $\gamma \geq 1$; ואינו מתכנס כלל אם $\gamma \leq -1$.

טענה 3.1.4 (תנאי קושי) הטור $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שאם $n, m > N$ אז $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon$.

הוכחה. זהו ניסוח מחדש של התנאי כי סדרת הסכומים החלקיים תהיה סדרת קושי, והרי כל סדרת קושי מתכנסת בממשיים. □

טענה 3.1.5 אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז בהכרח $a_n \to 0$.

הוכחה. לפי ההנחה הסדרה $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ מתכנסת לגבול ℓ; לכן גם תת־הסדרה s_{n+1} מתכנסת לאותו גבול, ולכן ההפרש $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to 0$. (התוצאה נובעת גם מקריטריון קושי, אם נבחר בו $m = n+1$). □

טענה 3.1.6 (חיבור טורים) אם הטורים $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum(a_n + b_n)$ מתכנס, וסכומו שווה ל־$\sum a_n + \sum b_n$.

טענה 3.1.7 (כפל טור בקבוע) לכל קבוע c, אז אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum(ca_n)$ מתכנס, וסכומו שווה ל־$c \sum a_n$.

טענה 3.1.8 (משפט אבל) יהי $\sum a_n$ טור מתכנס שכל מחובריו חיוביים. אם הסדרה b_n חסומה, אז גם הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה. לפי קריטריון קושי. □

3.1.1 זנבות

כל טור מהצורה $a_m + a_{m+1} + \cdots$ נקרא **זנב** של הטור $a_1 + \cdots$. הזנב הוא טור בזכות עצמו.

טענה 3.1.9 הטור מתכנס אם ורק אם יש לו זנב מתכנס, אם ורק אם כל הזנבות שלו מתכנסים.

טענה 3.1.10 אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז סדרת סכומי הזנבות $t_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ שואפת בעצמה לאפס.

דוגמא 3.1.11 הוכח את קיום הגבול של $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n \to \gamma$. **הדרכה.** סמן $a_k = \frac{1}{k} + \log(1-1/k)$. מכיוון ש־$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n = a_1 + \cdots + a_n$, די להוכיח שהטור $\sum a_k$ מתכנס. לשם כך הוכח ש־$-\frac{1}{k^2} < a_k < 0$.

3.2 טורים חיוביים ומשפטי התכנסות עבורם

טור $\sum a_n$ הוא **טור חיובי** אם כל $a_n \geq 0$. עבור טור חיובי, סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית עולה, ולכן יש לה גבול במובן הרחב.

מסקנה 3.2.1 כל טור חיובי מתכנס במובן הרחב.

עם זאת, כמו בסדרות, אומרים שהטור **מתכנס** רק אם הוא מתכנס לערך סופי; **ומתבדר** אם הוא מתכנס לאינסוף.

3.2.1 מבחן ההשוואה

משפט 3.2.2 (מבחן ההשוואה לטורים) *יהיו $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ טורים חיוביים, ונניח שתמיד $a_n \leq b_n$. אם $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס, ומתקיים $\sum a_n \leq \sum b_n$. (ולהיפך: אם $\sum a_n$ מתבדר, אז גם $\sum b_n$ מתבדר.)*

הוכחה. לפי ההנחה $\sum_{n=1}^{N} b_n$ מתכנס לערך ℓ ובפרט חסומה מלעיל. מההנחה נובע שגם $\sum_{n=1}^{N} a_n$ חסומה, ולכן מתכנסת לערך קטן או שווה ל־ℓ. הסיפא היא הטענה הקונטרפוזיטיבית של הרישא. □

מסקנה 3.2.3 (מבחן ההשוואה הגבולי) תהיינה a_n, b_n סדרות כלשהן. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים ושונה מאפס, אז הטורים $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

3.2.2 מבחן השורש

משפט 3.2.4 (מבחן השורש של קושי) *יהי $\sum a_n$ טור חיובי. נניח שהגבול $q = \lim \sqrt[n]{a_n}$ קיים. אם $q < 1$ הטור מתכנס, ואם $q > 1$ הטור מתבדר (אם $q = 1$ המבחן נכשל).*

הוכחה. נניח ש־$\lim \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. נבחר $q < q' < 1$, ואז לבסוף מתקיים $a_n < q'^n$; לפי מבחן ההשוואה ודוגמא 3.1.3, הטור מתכנס. מאידך אם $\lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, נבחר $q > q' > 1$, ואז לבסוף מתקיים $a_n > q'^n \to \infty$; לפי הקריטריון על האיבר הכללי, הטור מתבדר. □

תרגיל 3.2.5 (✓) הכללה של מבחן השורש: אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ אז הטור מתכנס. אם $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, הטור מתבדר.

כדי להיטיב להשתמש במבחן השורש, עלינו להכיר כמה גבולות.

טענה 3.2.6 $\lim n^{1/n} = 1$.

הוכחה. נעזר בווריאנט הבא של אי־שוויון ברנולי, הנובע כמותו מפיתוח הבינום: לכל $x \geq 0$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2$. כלומר, $x \leq \sqrt{\frac{(1+x)^n-1}{n(n-1)/2}}$. כעת נציב $x = n^{1/n} - 1$, ונקבל $n^{1/n} - 1 \leq \sqrt{\frac{n-1}{n(n-1)/2}} = \sqrt{\frac{2}{n}}$. התוצאה נובעת ממשפט הסנדוויץ'. □

מסקנה 3.2.7 לכל פולינום $P(n)$ מתקיים $|P(n)|^{1/n} \to 1$.

טענה 3.2.8 $\lim n!^{1/n} = \infty$.

הוכחה. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n > \left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot \dots \cdot n > (n/2)^{n/2}$ ולכן $n!^{1/n} > \sqrt{n/2}$. □

תרגיל 3.2.9 **(✓)** הפריכו על ידי דוגמא נגדית את מבחן השורש החזקתי, שלפיו אם (a_n) סדרה חיובית יורדת ו־$\lim \sqrt[n]{a_{2^n}} < 1$ אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

3.2.3 מבחן המנה

משפט 3.2.10 (מבחן המנה של ד'לאמבר) *יהי $\sum a_n$ טור חיובי. נניח שהגבול $q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים. אם $q < 1$ הטור מתכנס, ואם $q > 1$ הטור מתבדר (אם $q = 1$ המבחן נכשל).*

הוכחה. בדומה למבחן השורש. נניח ש־$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. נבחר $q < q' < 1$. יש N כך שאם $n > N$ אז $a_{n+1} < q'a_n$, וכך באינדוקציה מתקיים $a_n < q'^{N-n}a_N$ לכל $n > N$. לפי מבחן ההשוואה, הטור מתכנס.

כעת נניח ש־$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. נבחר $q > q' > 1$. כמקודם יש N כך שאם $n > N$ אז $a_{n+1} > q'a_n$, ובאינדוקציה $a_n > q'^{n-N}a_N \to \infty$; טור כזה אינו יכול להתכנס. □

תרגיל 3.2.11 **(✓)** הטור $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ מתכנס.

תרגיל 3.2.12 אם הגבול במבחן המנה קיים, אז הגבול במבחן השורש קיים ושווה לו. לכן מבחן המנה חלש ממבחן השורש: אם מבחן המנה מכריע את ההתכנסות של טור, אז גם מבחן השורש מכריע לגבי אותו טור. אבל יש טורים שעבורם מבחן המנה נכשל ומבחן השורש מצליח.

תרגיל 3.2.13 הוכיחו את מבחן המנה של המנות: אם (a_n) סדרה חיובית והגבול של $\frac{a_{n+2}/a_{n+1}}{a_{n+1}/a_n}$ קיים וקטן מ־1, אז הטור מתכנס.

3.2.4 מבחן העיבוי

אומרים ששני טורים **מתכנסים יחד** אם או ששניהם מתכנסים, או ששניהם מתבדרים.

תרגיל 3.2.14 **(✓)** אם $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ טורים חיוביים המקיימים $c \cdot a_{n+1} \leq b_n \leq C \cdot a_n$ כאשר c, C קבועים חיוביים, אז הטורים מתכנסים יחד.

טענה 3.2.15 יהי $\sum a_n$ טור חיובי. תהי $N_1 < N_2 < \cdots$ סדרת אינדקסים עולה ממש. אז הטורים $\sum a_n$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{N_k} + \cdots + a_{N_{k+1}-1})$ מתכנסים יחד.

הוכחה. משום שסדרת הסכומים החלקיים של הטור החדש היא תת־סדרה של סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי, וזו סדרה מונוטונית (טענה 2.3.17). □

משפט 3.2.16 (מבחן העיבוי) *תהי (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחיובית. אז הטורים $\sum a_n$ ו־$\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים יחד.*

הוכחה. לפי טענה 3.2.15 די להוכיח שהטורים $\sum 2^n a_{2^n}$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})$ מתכנסים יחד. זה נובע ממבחן ההשוואה לטורים, משום ש־

$$\frac{1}{2}2^{n+1}a_{2^{n+1}} = \underbrace{a_{2^{n+1}}+\cdots+a_{2^{n+1}}}_{2^n} \le a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1} \le \underbrace{a_{2^n}+\cdots+a_{2^n}}_{2^n} = 2^n a_{2^n}$$

□

דוגמא 3.2.17 יהי $p \ge 0$ קבוע. הטור $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$. אכן, לפי מבחן העיבוי הטור מתכנס יחד עם $\sum 2^n(2^n)^{-p} = \sum(2^{1-p})^n$, וזה טור גאומטרי. אם $p > 1$ אז $2^{1-p} < 1$ והטור מתכנס; אם $p \ge 1$ אז $2^{1-p} \ge 1$, והטור מתבדר.

בפרט, **הטור ההרמוני** $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

דוגמא 3.2.18 יהי $0 < \gamma < 1$ קבוע. הטור $\sum \gamma^n$ הוא טור הנדסי מתכנס. לפי מבחן העיבוי, הטור $\sum 2^n \gamma^{2^n}$ מתכנס אף הוא. (אשר שהטור הזה מתכנס על פי מבחן המנה.)

תרגיל 3.2.19 (✓) קבע מתי הטור $\sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ מתכנס.

תרגיל 3.2.20 (✓) קבע מתי הטור $\sum \frac{1}{n\log n(\log\log n)^p}$ מתכנס.

תרגיל 3.2.21 (✓) תהי (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחיובית. יהי $b \ge 2$ מספר טבעי. אז הטורים $\sum a_n$ ו־$\sum b^n a_{b^n}$ מתכנסים יחד.

3.2.5 נוסחת רימן

נציג בקצרה את נוסחת רימן לחישוב ממוצעים מסויימים, למרות שמקומה הראוי הוא בפרק על אינטגרציה.

טענה 3.2.22 תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. אז $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \to \int_0^1 f(x)dx$.

הוכחה. ישירות מהגדרת האינטגרל. □

טענה 3.2.23 $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

הוכחה. $\log(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}) = \frac{1}{n}\log(n!) - \log(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k/n) \to \int_0^1 \log(x)\,\mathrm{dx} = -1$. □

3.3 טורים בעלי סימנים משתנים

טענה 3.3.1 אם הטור $\sum|a_n|$ מתכנס, אז גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. קריטריון קושי ואי־שוויון המשולש (זה משפט אבל). □

הגדרה 3.3.2 *הטור $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum|a_n|$ מתכנס, **ומתכנס בתנאי** אם $\sum a_n$ מתכנס ו־$\sum|a_n|$ מתבדר.*

מסקנה 3.3.3 אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

3.3.1 משפט לייבניץ

משפט 3.3.4 (משפט לייבניץ) *תהי a_n סדרה חיובית, מונוטונית יורדת, שגבולה הוא 0. אז הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ (טור כזה נקרא **טור לייבניץ**). מתכנס. יתרה מזו, לכל N מתקיים $|\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n| \le a_N$.*

הוכחה. נסמן ב־$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n$ את סדרת הסכומים החלקיים של הטור המתחלף. אז

$$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \cdots \le s_5 \le s_3 \le s_1.$$

הסדרה s_{2n} מונוטונית עולה וחסומה, ולכן מתכנסת; הסדרה s_{2n+1} מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן מתכנסת. ההפרש $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}\to 0$, ולכן לשתי הסדרות אותו גבול. לפי תרגיל 2.3.19, סדרת הסכומים החלקיים (s_n) מתכנסת.

יתרה מזו, הגבול בוודאי מקיים $0 \le s \le s_1 = a_1$. הסיפא של המשפט מתקבלת אם מתבוננים כעת בזנב $\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, שהוא בוודאי טור לייבניץ. □

תרגיל 3.3.5 הפרך, באמצעות דוגמא נגדית, את מבחן ההשוואה הגבולי עבור טורים בעלי סימנים מתחלפים (מסקנה 3.2.3). **הדרכה.** קח $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ו־$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

3.3.2 סידור מחדש של טורים

סדרת אינדקסים $n_1, n_2, \dots$ שכל מספר טבעי מופיע בה בדיוק פעם אחת נקראת **תמורה**. אם (n_k) תמורה, אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ נקרא **סידור מחדש** של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט 3.3.6 *אם הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז כל סידור מחדש שלו מתכנס, ולאותו ערך.*

הוכחה. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ של הטור המקורי, ובסדרת הסכומים החלקיים $r_N = \sum_{k=1}^{N} a_{n_k}$ של הסידור מחדש. נקבע N כלשהו. מכיוון שכל אחד מהמספרים $1, \dots, N$ חייב להופיע בסדרה (n_k) בדיוק פעם אחת, יש K גדול מספיק כך שכולם מופיעים ברשימה $n_1, \dots, n_K$. כעת כל אחד מהמחוברים $a_1, \dots, a_N$ מופיע בדיוק פעם אחת גם בסכום s_K וגם בסכום r_K, ולכן $|s_K - r_K| \le \sum_{n=N+1}^{K}|a_n| + \sum_{k=1,\dots,K,\ n_k>N}|a_{n_k}| \le 2\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$.

מכיוון שהטור שלנו מתכנס בהחלט, סכומי הזנבות שואפים לאפס לפי הקריטריון להתכנסות 3.1.10, ומכאן שגם $r_K - s_K \to 0$. לכן $\sum a_{n_k} = \lim_{K\to\infty} r_K = \lim_{K\to\infty} s_K = \sum a_n$. □

עבור מספר a, נסמן $a^+ = \frac{a+|a|}{2} = \begin{cases} a & a \ge 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$ ו־ $a^- = \frac{a-|a|}{2} = \begin{cases} a & a \le 0 \\ 0 & a > 0 \end{cases}$. כך מתקיים תמיד $a = a^+ + a^-$.

למה 3.3.7 יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אז $\sum a_n^+ = \infty$ ו־$\sum a_n^- = -\infty$.

הוכחה. אם הטורים היו שניהם מתכנסים לסכום סופי, היינו מקבלים $\sum |a_n| = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$, בסתירה להנחה ש־$\sum |a_n| = \infty$. אם אחד הטורים מתכנס לסכום סופי והשני לאינסוף או למינוס אינסוף, נקבל סתירה לכך ש־$\sum a_n$ מתכנס. □

משפט 3.3.8 (משפט רימן) *יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אז לכל $\ell \in \mathbb{R}$ יש סידור מחדש $\sum a_{n_k}$ שסכומו הוא $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \ell$.*

(המשפט נכון גם עבור $\ell = \infty$ ו־$\ell = -\infty$.)

הוכחה. (סקירת ההוכחה) בבניית הסידור מחדש של הטור, בוחרים ראשית די אברים חיוביים כדי לעבור את הגבול המבוקש ℓ מלעיל; ואז די אברים שליליים כדי לעבור אותו מלרע; וחוזר חלילה. התהליך אינו נעצר משום שטורי החלק החיובי והחלק השלילי מתבדרים לפי הלמה; והוא הולך ומתקרב ל־ℓ משום שמההתכנסות בתנאי נובע שהאבר הכללי שואף לאפס. □

דוגמא 3.3.9 נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, הקרוי **הטור ההרמוני המתחלף**. הטור מתכנס לפי משפט לייבניץ. נסמן את סכומו ב־ℓ (ידוע שהסכום הזה שווה ל־$\log 2$). כעת נקבץ את האברים לפי התבנית הבאה: $+--+--\cdots$. כלומר, נתבונן בסידור מחדש

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \cdots.$$

חישוב פשוט מראה שהטור שווה ל־

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \cdots$$

ולכן מתכנס ל־$\frac{1}{2}\ell$.

תרגיל 3.3.10 הראה ש־$\frac{3}{2}\ell = \cdots + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$. **הדרכה**. העזר בדוגמא 3.1.11.

3.4 המספר e

המספר e, בסיס הלוגריתם הטבעי, הוא אולי הקבוע החשוב ביותר במתמטיקה. בסעיף זה נגדיר אותו ונציג כמה תכונות פשוטות שלו.

טענה 3.4.1 לכל $x \geq 0$, הסדרה $(1 + \frac{x}{n})^n$ היא סדרה עולה.

הוכחה. הפיתוח הבינומי הוא

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{x}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{0}{n})(1 - \frac{1}{n})\cdots(1 - \frac{k+1}{n})x^k;
\end{aligned}$$

במעבר מ־n ל־$n+1$, כל אחד מהמחוברים גדל, ונוסף עוד מחובר חיובי. □

טענה 3.4.2 הסדרה $(1+\frac{x}{n})^n$ חסומה (לכל x).

הוכחה. **ראשית נבדוק עבור** $x=1$:

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum\binom{n}{k}n^{-k} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \le 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 3.$$

לכל x **קיים** N **טבעי כך ש־**$x \le N$**, ואז** $(1+\frac{x}{Nn})^{Nn} \le ((1+\frac{1}{n})^n)^N \le 4^N$ **תת־סדרה חסומה.** □

מכאן שהגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ קיים לכל $x\ge 0$, ואנו מגדירים בעזרתו את הפונקציה

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

הערך

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

נקרא **בסיס הלוגריתם הטבעי**, ומסמנים אותו דרך קבע באות e.

תרגיל 3.4.3 (✓) לכל n ולכל k מתקיים

$$1-\frac{k(k-1)}{2n} \le \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right).$$

הדרכה. עבור n קבוע, נוכיח את הטענה באינדוקציה על k. אכן במקרה $k=0$ אין מה להוכיח, ואם הטענה נכונה ל־k אז

$$\prod_{i=0}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right) \ge (1-\frac{k(k-1)}{2n})(1-\frac{k}{n}) = 1-\frac{k(k+1)}{2n}+\frac{k^2(k-1)}{2n^2} \ge 1-\frac{k(k+1)}{2n}.$$

טענה 3.4.4 $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ לכל $x\ge 0$.

הוכחה. **הטור באגף ימין מתכנס לפי מבחן המנה. לפי ההגדרה,** $\exp(x)$ **הוא הגבול של הסדרה**

$$(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k n^{-k} = \sum_{k=0}^{n}(1-\frac{0}{n})(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\frac{x^k}{k!}$$

החסומה לפי תרגיל 3.4.3 בין שתי סדרות:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{x^k}{k!} \le (1+\frac{x}{n})^n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

ההפרש בין שני החסמים הוא

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\frac{x^k}{k!} = \frac{x^2}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{k!} \le \frac{1}{2n}\left(x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) \to 0$$

משום שהטור כאמור מתכנס, ולכן שתי הסדרות מתכנסות לגבול $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$**. לפי משפט הסנדוויץ', גם** $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. □

3.4.1 תכונת הכפליות

טענה 3.4.5 לכל α, $(1+\frac{\alpha}{n^2})^n \to 1$.

הוכחה. הסדרה $(1+\frac{\alpha}{n^2})^{n^2}$ חסומה, בתור תת־סדרה של סדרה חסומה; והתוצאה מתקבלת מטענה 2.3.41 על השורש ה־n־י של סדרה חסומה. □

טענה 3.4.6 עבור $x>0$, הגבול $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n$ קיים, ושווה ל־$1/\exp(x)$. אנו מגדירים $\exp(-x)=1/\exp(x)$.

הוכחה. $\lim(1-\frac{x}{n})^n = \lim\frac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{\lim(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{\lim(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{1}{\exp(x)}$. □

טענה 3.4.7 $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

הוכחה. לפי ההגדרה

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x)\exp(y)}{\exp(x+y)} &= \frac{\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\lim\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}\\ &= \lim\left(\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n\\ &= \lim\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n.\end{aligned}$$

אבל

$$1\le\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n\le\left(1+\frac{xy}{n^2}\right)^n\to 1$$

לפי טענה 3.4.5. □

טענה 3.4.8 לכל $r\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\exp(rx)=\exp(x)^r$.

הוכחה. כתוב $r=\frac{n}{m}$ עבור $n,m\in\mathbb{Z}$, אז $\exp(ny)=\exp(y)^n$ באינדוקציה על טענה 3.4.7, ולכן $\exp(z/n)=\exp(z)^{1/n}$, ו־$\exp(\frac{n}{m}x)=\exp(nx)^{1/m}=\exp(x)^{n/m}$. □

פרק 4

פונקציות רציפות

4.1 גבול של פונקציה

המושג קטע מתייחס, כזכור, לקטע פתוח או סגור. אומרים שנקודה נמצאת **בפנים הקטע** אם היא שייכת לקטע הפתוח, כלומר אינה אחד מקצות הקטע. קטע שהסירו ממנו נקודה בפנים נקרא **קטע מנוקב**.

תרגיל 4.1.1 ($\checkmark$) קטע מנוקב הוא איחוד זר של שני קטעים.

4.1.1 הגבול לפי קושי

תהי $x_0 \in I$ נקודה בפנים הקטע, ותהי $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על הקטע המנוקב.

הגדרה 4.1.2 *הערך ℓ הוא הגבול (**לפי קושי**) של f בנקודה x_0 אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ (ו־$x \in I$) אז $|f(x) - \ell| < \epsilon$. במקרה זה מסמנים $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.*

הערה 4.1.3
1. הדרישה ש־$x \in I$ נמצאת בסוגריים, משום שתמיד אפשר לבחור δ קטן מספיק כך שהתנאי הזה יהיה מיותר.
2. התנאי $|f(x) - \ell| < \epsilon$ חל על x אם $0 < |x - x_0| < \delta$, כלומר אם $|x - x_0| < \delta$ ו־$x \neq x_0$. מכאן שהערך של f בנקודה x_0 אינו רלוונטי לשאלת קיום הגבול (f אינה מוכרחה אפילו להיות מוגדרת בנקודה).
3. כמו במקרה של סדרות, אם הגבול של פונקציה בנקודה קיים, אז הוא יחיד.

אם קיים ℓ כך ש־$\lim_{x\to a} f(x)$, אז לפונקציה **יש גבול** בנקודה $x = x_0$.

בדומה לזה, הגבול של הפונקציה בנקודה הוא ∞ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $f(x) > M$; והגבול הוא $-\infty$ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $f(x) < -M$. מסמנים $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ או $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, בהתאמה. הגבול **קיים במובן הרחב** אם הגבול קיים או שווה לאינסוף או למינוס אינסוף.

4.1.2 הגבול לפי היינה

שוב תהי $x_0 \in I$ נקודה בפנים הקטע, ותהי $f: I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על הקטע המנוקב. אומרים שהערך ℓ הוא **הגבול לפי היינה של f בנקודה** x_0 אם לכל סדרה מתכנסת $x_n \to x_0$, שאינה מקבלת את הערך x_0, מתקיים $f(x_n) \to \ell$.

טענה 4.1.4 הגבול לפי קושי קיים אם ורק אם הגבול לפי היינה קיים, ובמקרה זה הם שווים.

הוכחה. נניח שהגבול לפי קושי שווה ל־ℓ. תהי $a_n \to x_0$ סדרה מתכנסת. עלינו להראות שהסדרה $f(a_n)$ מתכנסת ל־ℓ. יהי $\epsilon > 0$. לפי התכנסות קושי, קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - \ell| < \epsilon$. לפי התכנסות הסדרה, קיים N שממנו והלאה $|a_n - x_0| < \delta$. לכן $|f(a_n) - \ell| < \epsilon$, כדרוש.

בכיוון ההפוך, נניח שהגבול לפי היינה שווה ל־ℓ. יהי $\epsilon > 0$. עלינו להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - \ell| < \epsilon$. אחרת, לכל $\delta > 0$ קיימת נקודה x_δ המקיימת $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ ובכל זאת $|f(x_\delta) - \ell| \geq \epsilon$. בפרט, לכל n קיימת נקודה x_n כך ש־$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ובכל זאת $|f(x_n) - \ell| \geq \epsilon$. לפי משפט הסנדוויץ', $x_n \to x_0$. לפי התכנסות היינה $f(x_n) \to \ell$, וזו סתירה.

□

מסקנה 4.1.5 אם קיימות שתי סדרות $a_n \to x_0$ ו־$b_n \to x_0$ כך ש־$\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$, אז $\lim_{x \to x_0} f(x)$ אינו קיים.

הערה 4.1.6 תהי f פונקציה המוגדרת על קטע מנוקב $I - \{x_0\}$. אם לכל סדרה מתכנסת $x_n \to x_0$ שאינה מקבלת את הערך x_0 יש גבול לסדרה $f(x_n)$, אז לפונקציה יש גבול בנקודה. (החידוש כאן הוא שאין צורך להניח שכל הסדרות מתכנסות לאותו גבול).

אכן, אחרת אפשר היה לבנות סדרה המבקרת את שתי הסדרות לסירוגין.

דוגמא 4.1.7 נתבונן בפונקציה $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{x})$ בנקודה 0. נראה שהגבול אינו קיים. נבחר $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = \frac{1}{n+\frac{1}{4}}$. כמובן $a_n, b_n \to 0$, אבל $f(a_n) = \sin(2\pi n) = 0$ ואילו $f(b_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$, כך שהגבולות שונים.

4.1.3 גבולות חד־צדדיים

פעמים שהפונקציה מוגדרת בקטע פתוח ועלינו לדון בגבול שלה בנקודת קצה. במקרה זה יש לעדן את הגדרת הגבול, באופן הבא:

הגדרה 4.1.8 *יהי I קטע פתוח, ותהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה.*

1. *תהי x_0 הנקודה בקצה הימני של הקטע. אומרים* ***שהגבול משמאל של f בנקודה x_0 הוא ℓ אם לכל*** *$\epsilon > 0$* ***קיים*** *$\delta > 0$* ***כך שאם*** *$x_0 - \delta < x < x_0$* ***אז*** *$|f(x) - \ell| < \epsilon$.*
2. *תהי x_0 הנקודה בקצה השמאלי של הקטע. אומרים* ***שהגבול מימין של f בנקודה x_0 הוא ℓ אם לכל*** *$\epsilon > 0$* ***קיים*** *$\delta > 0$* ***כך שאם*** *$x_0 < x < x_0 + \delta$* ***אז*** *$|f(x) - \ell| < \epsilon$.*

גבול כזה נקרא **גבול חד־צדדי.** מסמנים $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ לגבול משמאל, ו־$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ לגבול מימין.

גם כאן אפשר להציע הגדרות של הגבול במונחי סדרות (לפי היינה), ומתקבלות הגדרות שקולות.

הגדרנו גבול חד־צדדי סופי. בדומה לזה אפשר להגדיר מתי הגבול הוא אינסוף או מינוס אינסוף.

הערה 4.1.9 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ אם ורק אם $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

4.1.4 אריתמטיקה של גבולות

טענה 4.1.10 אם הגבולות $\lim_{x\to a} f(x)$ ו־$\lim_{x\to a} g(x)$ קיימים, אז

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$.
4. אם $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

הוכחה. קל להוכיח את הטענות בעזרת התכנסות לפי סדרות. תהי $x_n\to a$ סדרה מתכנסת. לפי ההנחה $f(x_n)\to \lim_{x\to a} f(x)$ ו־$g(x_n)\to \lim_{x\to a} g(x)$, וכעת נובעות כל הטענות מן הטענות המקבילות על אריתמטיקה של גבולות של סדרות. □

משפט 4.1.11 (משפט הסנדוויץ' לפונקציות) *נניח ש־$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ בסביבה מנוקבת של $x = a$. אם הגבולות של f, h ב־a קיימים ושווים, אז גם הגבול של g בנקודה קיים ושווה להם.*

4.2 פונקציות רציפות

4.2.1 רציפות בנקודה ובקטע

הגדרה 4.2.1 *תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. הפונקציה* ***רציפה בנקודה*** *$x_0 \in I^\circ$ אם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים בנקודה זו, ושווה ל־$f(x_0)$.*

לרציפות יש כמה איפיונים מועילים ביותר.

טענה 4.2.2 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ו־$x_0 \in I^\circ$. אז f רציפה ב־x_0 אם ורק אם לכל קטע פתוח U המכיל את $f(x_0)$ יש קטע פתוח V המכיל את x_0 כך ש־$f(V) \subseteq U$.

הוכחה. ראשית נניח שהפונקציה רציפה ב־x_0. יהי U קטע פתח המכיל את $f(x_0)$. אז יש $\epsilon > 0$ כך ש־$(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon) \subseteq U$. לפי הרציפות קיים $\delta > 0$ כך שאם $x \in V = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ אז $|f(x)-f(x_0)| < \delta$, ובפרט $f(x) \in U$.

כעת נניח שהפונקציה מקיימת את התנאי על U, V. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $U = (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$. לפי ההנחה יש קטע פתוח V סביב x_0 כך ש־$f(V) \subseteq U$, אבל אז יש $\delta > 0$ כך ש־$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq V$. כעת, אם $|x - x_0| \delta$ אז $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq V$ ולכן $f(x) \in U$, כלומר $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$. □

טענה 4.2.3 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ו־$x_0 \in I^\circ$. אז f רציפה ב־x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x_n\to x_0$ מתקיים $f(x_n)\to f(x_0)$.

הוכחה. אם הטענה על הסדרות מתקיימת, אז $\lim f(x) = f(x_0)$ לפי הגדרת הגבול של היינה. בכיוון ההפוך, נניח ש־f רציפה, ותהי $x_n\to x_0$ סדרה מתכנסת. יש שלוש אפשרויות. אם הסדרה שווה ל־x_0 פרט למספר סופי של ערכים, אז אפשר להניח שהיא קבועה ובוודאי $f(x_n)\to f(x_0)$. אם אחרת אפשר להניח שהיא אינה מקבלת את הערך x_0 כלל, ואז $\lim f(x_n) = f(x_0)$ לפי הגדרת הגבול של היינה. ובמקרה האחרון שבו x_0 מופיע אינסוף פעמים וגם ערכים אחרים מופיעים אינסוף פעמים, אפשר לפרק את הסדרה לשתי תת־סדרות, ותמונת f של כל אחת מהן מתכנסת ל־$f(x_0)$, ולכן כך גם עבור הסדרה כולה. □

טענה 4.2.4 הפונקציה הקבועה $f(x)=c$ רציפה בכל נקודה.

טענה 4.2.5 אם f,g רציפות בנקודה a אז גם הסכום והמכפלה שלהן רציפות בנקודה זו.

טענה 4.2.6 אם f רציפה בנקודה a ו־$f(a)\neq 0$, אז יש סביבה של a שבה $f(x)\neq 0$.

הוכחה. **לפי ההנחה** $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, **ולכן קיים** $\delta>0$ **כך שאם** $|x-a|<\delta$ **אז** $|f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$; **אבל אז** $|f(x)|>\frac{|f(a)|}{2}>0$. □

טענה 4.2.7 אם f רציפה בנקודה a ו־$f(a)\neq 0$ אז גם $1/f$ רציפה שם.

הוכחה. **נשתמש בקריטריון לרציפות לפי סדרות. תהי** $a_n\to a$ **סדרה מתכנסת. לפי טענה 4.2.6 אפשר להניח (על ידי השמטת רישא של הסדרה) ש־**$f(a_n)\neq 0$ **לכל** n. **לפי טענה 2.2.14,** $\lim\frac{1}{f(a_n)}=\frac{1}{\lim f(a_n)}=\frac{1}{f(a)}$. □

המשפט הבא מאפשר להחליף משתנים בחישוב של גבול.

משפט 4.2.8 *תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a, רציפה ומונוטונית בסביבה זו. לכל פונקציה g המוגדרת בסביבה של $f(a)$,*

$$\lim_{y\to f(a)} g(y)=\lim_{x\to a} g(f(x)),$$

כלומר אם אחד הגבולות קיים, אז השני קיים ושווה לו.

הוכחה. **נניח שהגבול** $\lim_{y\to f(x)} g(y)$ **קיים ושווה לערך** L. **תהי** $x_n\to a$ **סדרה מתכנסת, אז** $f(x_n)\to f(x)$, **ולכן גם** $g(f(x_n))\to L$.

הכיוון ההפוך זהה משום שלפי ההנחה הפונקציה f הפיכה, עם הפכית רציפה. □

מסקנה 4.2.9 תהי f פונקציה רציפה בנקודה $x=a$, ותהי g פונקציה רציפה בנקודה $f(a)$. אז $g\circ f$ רציפה ב־$x=a$.

הוכחה. **לפי משפט 4.2.8,** $\lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{y\to f(a)} g(y)=g(f(a))$. □

במלים אחרות, אם $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ ו־g רציפה, אז $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))=g(\ell)$.

4.2.2 נקודות אי־רציפות

מקובל למיין את נקודות אי־הרציפות של פונקציה לסוגים.

0. נקודה x_0 היא **אי־רציפות סליקה** אם הגבול של $f(x_0)$ קיים שם. אם הפונקציה לא רציפה, זה מפני שהיא אינה מוגדרת בנקודה, או שהיא מוגדרת ומקבלת ערך שונה מן הגבול. במקרה זה אפשר "לתקן" את הפונקציה על ידי הגדרתה מחדש בנקודה, כך ש־$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$, והפונקציה נעשית רציפה בנקודה.
1. אי־הרציפות היא **מסוג ראשון** אם שני הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ו־$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ קיימים, אבל שונים זה מזה.
2. אי־הרציפות היא **מסוג שני** אם אחד הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ו־$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ אינו קיים.

תרגיל 4.2.10 (✓) פונקציית דיריכלה מוגדרת לפי $d(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכח שהיא אינה רציפה באף נקודה של הישר.

4.2.3 פונקציה רציפה בקטע סגור

הפונקציה **רציפה בקטע** אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

כמסקנות מטענות 4.2.2 ו־4.2.3, נקבל:

טענה 4.2.11 פונקציה f המוגדרת בקטע פתוח I היא רציפה שם אם ורק אם לכל קטע פתוח U יש קטע פתוח V כך ש־$f(V) \subseteq U$.

טענה 4.2.12 פונקציה f המוגדרת בקטע פתוח I היא רציפה שם אם ורק אם לכל סדרה מתכנסת (x_n) מתקיים כי $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.

תכונת ערך הביניים

המובן האינטואיטיבי של רציפות הוא שאפשר, כביכול, לצייר את גרף הפונקציה בהינף קולמוס, בלי לנתק אותו מהדף. למרות שהאינטואיציה הזו אינה נכונה (כפי שנראה בהמשך), המשפט החשוב הבא מראה שפונקציה רציפה אינה יכולה "לדלג על ערכים".

משפט 4.2.13 (משפט ערך הביניים) תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח ש־$f(a) < c < f(b)$. אז יש נקודה $x \in (a,b)$ כך ש־$f(x) = c$.

הוכחה. נתבונן בקבוצה $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq c\}$. היא לא ריקה, חסומה, ולכן יש לה חסם עליון סופי $x_0 = \sup A$. נוכיח ש־$f(x_0) = c$. אחרת יש שתי אפשרויות:

1. $c < f(x_0)$. נסמן $\epsilon = \frac{c-f(x_0)}{2} > 0$. לפי הרציפות בנקודה x_0, קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ובפרט $f(x) \leq f(x_0)+|f(x) - f(x_0)| \leq f(x_0)+\epsilon < \frac{c+f(x_0)}{2} < c$. בפרט $x_0 + \frac{\delta}{2} \in A$, בסתירה לכך ש־$x_0$ הוא החסם העליון.

2. $c > f(x_0)$. נסמן $\epsilon = \frac{f(x_0)-c}{2}$, ואותו נימוק מראה שקיים $\delta > 0$ כך ש־$f(x) > c$ לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. אם כך $A \leq x_0 - \frac{\delta}{2}$, בסתירה לכך ש־$x_0$ הוא החסם העליון.

□

מסקנה 4.2.14 אם פונקציה רציפה בקטע פתוח מקבלת ערכים גדולים וקטנים מ־c, אז תמונתה מכילה סביבה של c.

מסקנה 4.2.15 לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש שורשים.

הוכחה. העזר בכך ש־$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ ו־$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$. □

תכונת החסימות

טענה 4.2.16 (משפט החסימות של ויירשטראס) פונקציה רציפה בקטע סגור היא חסומה.

הוכחה. אחרת, לכל n יש בקטע נקודה x_n כך ש־$n < f(x_n)$. לפי משפט בולצאנו־ויירשטראס, לסדרה (x_n) יש תת־סדרה מתכנסת, נאמר $x_{n_k} \to x_0$. הנקודה x_0 נמצאת בקטע משום שזה קטע סגור. לפי הרציפות, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, אבל מאידך $f(x_n) \to \infty$, וזו סתירה. □

קיום נקודות הקיצון

נקודה x_0 נקראת **נקודת מקסימום** בקטע אם $f(x_0) \ge f(x)$ לכל x בקטע. באופן דומה מוגדרת גם נקודת מינימום.

משפט 4.2.17 (משפט המקסימום של ויירשטראס) *לפונקציה רציפה בקטע סגור I יש מקסימום ומינימום בקטע.*

הוכחה. הפונקציה חסומה (מלעיל) לפי משפט החסימות. לכן הסופרימום $z = \sup_{x\in I} f(x)$ קיים וסופי. לפי הקריטריון לחסם העליון, לכל n טבעי יש נקודה $x_n \in I$ כך ש־$z - \frac{1}{n} < f(x_n) \le z$. לסדרה x_n יש תת־סדרה מתכנסת, נאמר $x_{n_k} \to x_0$; לפי הרציפות $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, אבל לפי משפט הסנדוויץ' לסדרות, $f(x_n) \to z$. לכן $f(x_0) = z$. ההוכחה עבור מינימום זהה. □

יחד עם משפט ערך הביניים, משפט זה מתאר כיצד פועלת פונקציה רציפה על קטעים סגורים.

מסקנה 4.2.18 תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור I. אז $f(I) = \{f(x) :\ x \in I\}$ הוא קטע.

הוכחה. לפי משפט המקסימום, יש לפונקציה מינימום ומקסימום בקטע, כלומר קיימות נקודות x', x'' בקטע I, כך ש־$f(x') \le f(x) \le f(x'')$ לכל $x \in I$. כלומר, $f(I) \subseteq J = [f(x'), f(x'')]$. לכל $c \in J$, קיימת נקודה $x' \le x_0 \le x''$ כך ש־$c = f(x_0) \in f([x', x'']) \subseteq f(I)$. לכן $f(I) = J$. □

לפי התפיסה האינטואיטיבית, הגרף של פונקציה רציפה בקטע סגור הוא מעין חבל שראשו בתחילת הקטע וסופו בסוף הקטע. להלן דוגמא המראה ש"חבל" הזה עלול להיות בעל אורך אינסופי.

תרגיל 4.2.19 תהי (a_n) סדרה יורדת השואפת לאפס, כך ש־$a_0 = 1$. תהי b_n סדרה חיובית כלשהי.
תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ הפונקציה שהגרף שלה מורכב מן השוקיים של אינסוף המשולשים שבסיסיהם הקטעים $[a_{n+1}, a_n]$ וגובהם b_n. הראה שהפונקציה רציפה בקטע $(0,1]$. הראה שאם $b_n \to 0$ אז הפונקציה רציפה בכל הקטע $[0,1]$. הראה שאורך הגרף שווה ל־$\sum b_n < \sum_{n=0}^{\infty} 2\sqrt{(\frac{a_n - a_{n+1}}{2})^2 + b_n^2}$. הסק שאם הטור $\sum b_n$ אינו מתכנס אז אורך הגרף אינסופי.

4.2.4 רציפות במידה שווה

הגדרה 4.2.20 *תהי f פונקציה רציפה בקטע $I = [a,b]$. הפונקציה* ***רציפה במידה שווה*** *אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

נדגיש את ההבדלים:

- f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה, כלומר

$$(\forall x)(\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall y)\, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon;$$

זה היינו הך כמו

$$(\forall \epsilon)(\forall x)(\exists \delta)(\forall y)\, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

לעומת זאת:

- f רציפה במידה שווה בקטע אם

$$(\forall\epsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\forall y)\,|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

באופן כללי, טענה מתמטית מהסוג $(\exists\delta)(\forall x)P(x,\delta)$ אינה שקולה לטענה $(\forall x)(\exists\delta)P(x,\delta)$. המעבר ביניהן הוא **שגיאה של החלפת סדר הכמתים**. ובכל זאת:

משפט 4.2.21 (משפט קנטור) *פונקציה רציפה בקטע סגור I היא רציפה במידה שווה.*

הוכחה. נניח שלא. אז קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ יש $x,y\in I$ כך ש־$|x-y|<\delta$ ובכל זאת $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$. בפרט, לכל n קיימים $x_n,y_n\in I$ כך ש־$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ ובכל זאת $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$. לפי משפט בולצאנו־ויירשטראס, לסדרה (x_n) יש תת־סדרה מתכנסת $(x_{n_k})\to x_0$. לכן גם $(y_{n_k})\to x_0$. אבל כעת $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ ו־$f(y_{n_k})\to f(x_0)$, בסתירה לכך ש־$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\epsilon$. □

מסקנה 4.2.22 פונקציה רציפה בקטע סגור אפשר לקרב L^∞ על־ידי פונקציה לינארית למקוטעין.

הערה 4.2.23 פונקציה רציפה במידה שווה בקטע סופי, היא חסומה.

הוכחה. נבחר $\epsilon=1$. לפי ההנחה קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ בקטע אז $|f(x)-f(y)|<1$. נקד את הקטע במספר סופי של נקודות $y_1,\dots,y_n$ כך שכל נקודה בקטע מקיימת $|x-y_i|<\delta$ לאיזשהו i. כעת $|f(x)|\leq|f(y_i)|+1$, ולכן $|f(x)|\leq\max\{|f(y_1)|,\dots,|f(y_n)|\}+1$. □

מעניין להשוות: לפי משפט ויירשטראס 4.2.16, פונקציה רציפה בקטע סגור היא חסומה; פונקציה רציפה בקטע פתוח אינה חייבת להיות חסומה (למשל $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$). אבל פונקציה רציפה במידה שווה בקטע סופי, גם אם אינו סגור, היא כן חסומה. ומאידך, $f(x)=x$ רציפה במידה שווה על קרניים אינסופיות, וכמובן אינה חסומה.

כפי שרציפות אפשר לנסח גם במונחי אפסילון ודלתא (קושי) וגם במונחי סדרות (היינה), יש ניסוח במונחי סדרות לרציפות במידה שווה:

טענה 4.2.24 הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע I, אם ורק אם לכל זוג סדרות $(x_n),(y_n)$ בקטע, אם $x_n-y_n\to0$ אז גם $f(x_n)-f(y_n)\to0$.

קריטריון זה שימושי במיוחד כדי להוכיח שפונקציה אינה רציפה במידה שווה:

מסקנה 4.2.25 f אינה רציפה במידה שווה בקטע I אם ורק אם יש $\epsilon>0$ וסדרות (x_n), (y_n) בקטע כך ש־$x_n-y_n\to0$ ובכל זאת $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$.

טענה 4.2.26 (המשכת הרציפות). תהי f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע פתוח (a,b). אז הגבולות $\lim_{x\to a^+}f(x)$ ו־$\lim_{x\to b^-}f(x)$ קיימים. לכן, אם מגדירים את הפונקציה בקצוות על־פי הגבולות, הפונקציה המתקבלת רציפה בקטע הסגור.

הוכחה. לפי הערה 4.2.23, f חסומה. תהי $x_n\to b$ סדרה המתכנסת ל־b משמאל. הסדרה $f(x_n)$ חסומה, ולכן יש תת־סדרה x_{n_k} כך שהסדרה $f(x_{n_k})$ מתכנסת. כעת הסדרה $x_k-x_{n_k}\to0$, ולכן $f(x_k)-f(x_{n_k})\to0$, כלומר $f(x_k)$ מתכנסת. סיימנו לפי 4.1.6. □

תרגיל 4.2.27 (✓) הפונקציה $f(x) = 1/x$ אינה רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(0,1)$. הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה רציפה במידה שווה בישר הממשי.

תרגיל 4.2.28 (✓) חשוב על התנאי "לכל $\delta > 0$ קיים $\epsilon > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \epsilon$". הסבר מדוע אינו שקול לרציפות במידה שווה. הראה שבקטע סופי התנאי הזה גורר שהפונקציה חסומה.

תרגיל 4.2.29 (✓) תהי (a_n) סדרת קושי בשדה סדור F, ותהי f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע שאליו שייכים אברי הסדרה. אז $(f(a_n))$ היא סדרת קושי.

תנאי ליפשיץ

דוגמא 4.2.30 הפונקציה $f(x) = 1/x$ רציפה בקטע $(0,1)$, אבל אינה רציפה שם במידה שווה. הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה בישר הממשי, אבל אינה רציפה בו במידה שווה.

הגדרה 4.2.31 *פונקציה המוגדרת בקטע I מקיימת שם את **תנאי ליפשיץ** אם קיים קבוע L כך ש־ $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ לכל $x, y \in I$.*

טענה 4.2.32 פונקציה המקיימת את תנאי ליפשיץ בקטע, היא רציפה שם במידה שווה.

הוכחה. יהי L קבוע ליפשיץ של הפונקציה בקטע. יהי $\epsilon > 0$, אז אם $|x-y| < \frac{\epsilon}{L}$, מתקיים גם $|f(x) - f(y)| \le L|x-y| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$. □

תרגיל 4.2.33 (*) תן דוגמא לפונקציה רציפה במידה שווה בקטע, שאינה מקיימת שם את תנאי ליפשיץ. **הדרכה.** $f(x) = \sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$.

תרגיל 4.2.34 יהי I קטע סופי. נניח שפונקציה f המוגדרת בקטע מקיימת את תנאי ליפשיץ עם הקבוע L בכל תת־קטע באורך $< d$. אז הפונקציה מקיימת את התנאי בכל הקטע, עם אותו קבוע.

4.2.5 פונקציות מונוטוניות

בדומה לסדרות, פונקציה f היא **עולה** בקטע אם לכל $x \le y$ בקטע מתקיים $f(x) \le f(y)$; **ועולה במובן החזק** אם לכל $x < y$ בקטע מתקיים $f(x) < f(y)$. הפונקציה **יורדת** אם לכל $x \le y$ מתקיים $f(x) \ge f(y)$, **ויורדת במובן החזק** אם לכל $x < y$ מתקיים $f(x) > f(y)$. פונקציה שהיא עולה (במובן החזק) בקטע, או יורדת (במובן החזק) בקטע, היא **פונקציה מונוטונית** (במובן החזק). נקודות אי־הרציפות של פונקציה מונוטונית הן כולן אי־רציפויות של קפיצה, כלומר מסוג ראשון.

טענה 4.2.35 אם פונקציה רציפה בקטע היא חד־חד־ערכית, אז היא מוכרחה להיות מונוטונית במובן החזק.

הקושי הוא בכך שאיננו יכולים להוכיח שהפונקציה עולה, וגם לא שהיא יורדת (אף אחת משתי האפשרויות אינה הכרחית).

הוכחה. **נאמר שפונקציה היא מונוטונית על n־יות בקטע אם לכל $x_1 < \cdots < x_n$ בקטע מתקיים $f(x_1) < \cdots < f(x_n)$ או $f(x_1) > \cdots > f(x_n)$. כל פונקציה חד־חד־ערכית היא מונוטונית על זוגות. התנאי הזה נעשה חזק יותר ככל ש־n גדל.**

1. פונקציה חד־חד־ערכית ורציפה היא מונוטונית על שלשות. אכן, תהיינה $a<b<c$ נקודות בקטע. אם $f(b)>f(a),f(c)$, אז לפי משפט ערך הביניים הערך $\max\{f(a),f(c)\}$ מתקבל גם בקטע $[a,b)$ וגם בקטע $(b,c]$, בסתירה לחד־חד־ערכיות. מאותה סיבה גם לא יתכן ש־$f(b)<f(a),f(c)$. כלומר, $f(b)$ תמיד בין $f(a)$ ל־$f(c)$.
2. פונקציה מונוטונית על שלשות היא מונוטונית על רביעיות. שהרי אם $a<b<c<d$, התנהגות הפונקציה על הזוג $b<c$ מכתיבה את ההתנהגות על השלשות $a<b<c$ ו־$b<c<d$.
3. פונקציה מונוטונית על רביעיות היא מונוטונית. שהרי לכל שני זוגות $a<b$ ו־$c<d$, כיוון הפונקציה על שני הזוגות נקבע לפי ההתנהגות שלה ברביעיה $\{a,b,c,d\}$.

□

רציפה ומונוטונית ממש $\Longleftrightarrow$ רציפה וחד־חד־ערכית

$\Downarrow$ $\Downarrow$

מונוטונית ממש $\Longrightarrow$ חד־חד־ערכית

טענה 4.2.36 אם f פונקציה רציפה ועולה במובן החזק בקטע, אז $f(a,b)=(f(a),f(b))$ לכל זוג נקודות $a<b$ בקטע.

הוכחה. מיידי ממסקנה 4.2.18, מכיוון שהמינימום והמקסימום של הפונקציה מתקבלים בקצוות. □

מונוטוניות חשובה גם כשרוצים להשוות גבול של סדרה לגבול של הפונקציה המתארת אותה.

טענה 4.2.37 תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. אז $\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{x\to\infty} f(x)$.

הוכחה. ההגדרות לכך ש־$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ ולכך ש־$\lim_{n\to\infty} f(n)=a$ נכתבות באותו אופן: $\forall\epsilon>0\exists M\forall x(x>M \implies |f(x)-a|<\epsilon)$, בהחלפת x ב־n במקרה של סדרות. אבל משמעותן שונה: במקרה אחד מדובר ב־$x\in\mathbb{R}$, ובשני ב־$n\in\mathbb{N}$. עם זאת, התוצאה זהה בגלל המונוטוניות. □

תרגיל 4.2.38 (*) מצא פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ השואפת לאינסוף, כך ש־$\frac{g(2^x)}{g(x)}\to 1$. הדרכה. לכל פונקציה עולה $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ קיימת פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ השואפת לאינסוף, כך ש־$\frac{g(f(x))}{g(x)}\to 1$. נסמן $f^*(x)=\min_k\{x<f^k(1)\}$. אז $f^*(f(x))=1+f^*(x)$. מכיון ש־$f^*(x)\to\infty$ (לאט מאד), אפשר לקחת $g=f^*$.

4.2.6 הפונקציה ההפוכה

לכל פונקציה חד־חד־ערכית מקבוצה לקבוצה יש פונקציה הפוכה (יחידה) המוגדרת על טווח הפונקציה. מתברר שפעולת ההיפוך של פונקציה חד־חד־ערכית ועל שומרת על רציפות.

טענה 4.2.39 פונקציה מונוטונית במובן החזק היא חד־חד־ערכית, והפונקציה ההפוכה לה גם היא מונוטונית מאותו סוג.

הוכחה. נניח שאם $x<y$ אז $f(x)>f(y)$. גם להיפך, אם $f(x)>f(y)$ מוכרח להתקיים $x<y$ משום שאחרת $y<x$ גורר $f(x)<f(y)$. □

משפט 4.2.40 *יהיו I, J קטעים (לרבות קרניים או הישר כולו). תהי $f : I \to J$ פונקציה רציפה, חד־חד־ערכית ועל. אז הפונקציה ההפוכה $f^{-1} : J \to I$ היא רציפה.*

הוכחה. יהי $V \subseteq J^\circ$ קטע פתוח. לפי טענה 4.2.36, $U = f(V)$ הוא קטע פתוח, ואז $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(V)) = V$. □

אם הפונקציה מונוטונית אפשר להסתפק ברציפות בנקודה אחת:

טענה 4.2.41 תהי f פונקציה מונוטונית בסביבה של x_0 ורציפה ב־x_0. אז f^{-1} רציפה ב־$f(x_0)$.

הוכחה. נניח ש־f עולה. יהי $0 < \epsilon$. מכיוון ש־$x_0 - \epsilon < x_0 < x_0 + \epsilon$, לפי ההנחה מתקיים $f(x_0 - \epsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \epsilon)$. נבחר $\delta = \min\{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0), f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)\}$, ואז מ־$|y - f(x_0)| < \delta$ נובע $f(x_0 - \epsilon) < y < f(x_0 + \epsilon)$ ולכן $x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon$, כלומר $|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$. □

תרגיל 4.2.42 תן דוגמא לפונקציה f המוגדרת בסביבה של x_0 ורציפה בנקודה, שהיא הפיכה כפונקציה מסביבה של x_0 לסביבה של $f(x_0)$, וכך ש־f^{-1} אינה רציפה ב־$f(x_0)$.

הדרכה. נגדיר $f : (-1, 2) \to (-1, 2)$ לפי $f(1/n) = 1/2n$, $f(1 + 1/n) = 1/(2n + 1)$, ו־$f(x) = x$ לכל ערך אחר. אז f רציפה ב־0, והפונקציה ההפוכה מוגדרת בקטע $(-1, 1)$ אבל אינה רציפה באפס.

4.3 הפונקציות האלמנטריות

4.3.1 פולינומים

טענה 4.3.1 הפונקציה $f(x) = x$ רציפה בכל הישר.

פולינום הוא פונקציה מהצורה $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, כאשר $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

טענה 4.3.2 כל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל הישר.

(משום שאוסף הפונקציות הרציפות סגור לחיבור וכפל.)

4.3.2 פעולת החזקה

בתת־סעיף זה נגדיר את פעולת החזקה x^y לכל $x > 0$ ו־y ממשיים.

חזקות עם מעריך טבעי

הפונקציה $f(x) = x^0$ מוגדרת בכל נקודה $x \neq 0$ לפי $x^0 = 1$. עבור $n > 0$, הפונקציות $f(x) = x^n$ מוגדרות בכל הישר באינדוקציה, לפי

$$x^1 = x, \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n.$$

את חוקי החזקה קל להוכיח באינדוקציה כפולה (לכל a, b ממשיים ולכל n, m טבעיים):

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{4.1}$$
$$a^{n+m} = a^n a^m, \tag{4.2}$$
$$a^{nm} = (a^n)^m. \tag{4.3}$$

טענה 4.3.3 פונקציית החזקה $f(x)=x^n$ רציפה בכל הישר (לכל n טבעי).

הוכחה. **באינדוקציה לפי הרציפות של מכפלה.** □

טענה 4.3.4 עבור $n>0$ קבוע, הפונקציה $f(x)=x^n$ מונוטונית עולה, ומקיימת $f([0,\infty))=[0,\infty)$.

הוכחה. **מכפלה של פונקציות חיוביות עולות היא פונקציה עולה. הפונקציה אינה חסומה לפי השוואה לפונקציית הזהות, והיא מעתיקה את הקרן החיובית על הקרן החיובית לפי משפט ערך הביניים.** □

חזקות עם מעריך שלם

כדי שהכלל (4.2) יחול על חזקות שלמות (ולאו דווקא טבעיות), עלינו להגדיר לכל n טבעי $x^{-n}=(x^n)^{-1}$; פונקציות אלה מוגדרת על כל הישר למעט הנקודה $x=0$.

תרגיל 4.3.5 (✓) בדוק שכללי החזקה (4.1)-(4.3) תקפים לכל a,b ממשיים ו־n,m שלמים.

טענה 4.3.6 הפונקציות $f(x)=x^n$ רציפות בכל הישר למעט הנקודה $x=0$ לכל $n<0$.

חזקות שבריות

יהי n מספר טבעי. הפונקציה $f(x)=x^n$ היא פונקציה מונוטונית רציפה $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, ולפי משפט 4.2.40 הפונקציה ההפוכה רציפה. אנו מסמנים את הפונקציה ההפוכה הזו ב־$f^{-1}(y)=y^{1/n}$.

חזקות עם מעריך רציונלי

לשבר שמות רבים. כל מספר רציונלי אפשר להציג בצורה n/m באינסוף דרכים. אף על פי כן:

טענה 4.3.7 יהי $a>0$. אם $n/m=n'/m'$, כאשר n,m,n',m' מספרים שלמים, אז $(a^n)^{1/m}=(a^{n'})^{1/m'}$.

הוכחה. **לפי ההנחה** $nm'=n'm$, **וממילא** $a^{nm'}=a^{n'm}$. **נניח ש־**$x^m=a^n$ **ו־**$x'^{m'}=a^{n'}$, **אז** $x^{mm'}=(x^m)^{m'}=(a^n)^{m'}=a^{nm'}=a^{n'm}=(a^{n'})^m=(x'^{m'})^m=x'^{mm'}$, **ולפי יחידות השורש,** $x'=x$. □

כעת אפשר להגדיר:

הגדרה 4.3.8 ***יהי r מספר רציונלי, אז*** $a^r=(a^n)^{1/m}$ ***כאשר*** n,m ***שלמים כלשהם שעבורם*** $r=n/m$.

תרגיל 4.3.9 (✓) בדוק שכללי החזקה (4.1)-(4.3) תקפים לכל $a,b>0$ ממשיים ו־n,m רציונליים.

טענה 4.3.10 יהי $a>1$. הפונקציה $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ המוגדרת לפי $r\mapsto a^r$, היא פונקציה עולה.

הוכחה. **יהיו** $\frac{n}{m}<\frac{n'}{m'}$ **מספרים רציונליים. עלינו להוכיח ש־**$a^{n/m}<a^{n'/m'}$. **מכיוון שהעלאה בחזקה שלמה היא מונוטונית, די להוכיח ש־**$a^{nm'}<a^{n'm}$, **אבל זה ברור משום ש־**$nm'<n'm$. □

בסעיף 4.3.2 הגדרנו את הפונקציה a^r לכל $a \geq 0$ ממשי ולכל $r \in \mathbb{Q}$ רציונלי. כעת נעשה את הצעד האחרון, ונגדיר את פונקציית החזקה בצורה מלאה.

תרגיל 4.3.11 (✓) אם $r \leq 1$ רציונלי ו־$\gamma > 0$, אז $(1+\gamma)^r \leq 1 + r\gamma$. **הדרכה**. נכתוב $r = n/m$. צריך להראות ש־ $(1+\gamma)^{n/m} \leq 1 + \frac{n}{m}\gamma$, כלומר $(1+\gamma)^n \leq (1 + \frac{n}{m}\gamma)^m$. נוכיח זאת באינדוקציה על $m \geq n$. עבור $m = n$ אין מה להוכיח. להמשך די להראות שהפונקציה $(1 + \frac{n\gamma}{m})^m$ עולה עם m, אבל זו טענה 3.4.1.

מסקנה 4.3.12 הפונקציה a^r מקיימת את תנאי ליפשיץ עבור ערכים $r \in \mathbb{Q}$ בכל קטע סגור באורך < 1.

הוכחה. מספיק להוכיח את הטענה כאשר $a > 1$. נסמן את הקטע ב־$[r_0, r_1]$. לפי התרגיל, לכל r', r בקטע מתקיים $\left|a^{r'} - a^r\right| = a^r\left(a^{r'-r} - 1\right) \leq a^{r_1}(a-1)\left|r' - r\right|$. □

פונקציה המוגדרת על ערכים רציונליים בקטע היא **רציפה** בנקודה q אם לכל סדרה $q_n \to q$ של ערכים רציונליים מתקיים $f(q_n) \to f(q)$. (אפשר לנסח באופן דומה גם את תנאי קושי על ערכים רציונליים, והתנאים שקולים זה לזה).

מסקנה 4.3.13 הפונקציה a^r רציפה בכל $\mathbb{Q}$ (כפונקציה המוגדרת על ערכים רציונליים).

הוכחה. הפונקציה מקיימת את תנאי ליפשיץ, ולכן רציפה במידה שווה בכל קטע סגור; ממילא היא גם רציפה. □

הרחבה אל הממשיים

למה 4.3.14 לכל מספר ממשי יש סדרה של מספרים רציונליים המתכנסת אליו.

הוכחה. זוהי תכונת הצפיפות של $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$, מסקנה 1.1.94. □

משפט 4.3.15 *יהי I קטע פתוח בממשיים. תהי $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על הערכים הרציונליים בקטע. נניח ש־f מקיימת שם את תנאי ליפשיץ.*

1. *אם q_n סדרת רציונליים מתכנסת ב־I, אז הסדרה $f(q_n)$ מתכנסת.*
2. *אם q_n, q'_n הן שתי סדרות של ערכים רציונליים המתכנסות לאותו גבול ממשי x, אז $\lim f(q_n) = \lim f(q'_n)$.*

נגדיר $f^* : I \to \mathbb{R}$ כך: לכל $x \in I$ נבחר סדרה רציונלית $q_n \to x$, ונגדיר $f^*(x) = \lim f(q_n)$.

3. *אז f^* ממשיכה את f.*
4. *f^* מקיימת את תנאי ליפשיץ עם אותו קבוע.*
5. *בנוסף לזה, אם f עולה (במובן החזק) אז גם f^* עולה (במובן החזק).*

הוכחה. יהי L קבוע ליפשיץ של הפונקציה f.

1. תהי $q_n \to x$ סדרה רציונלית המתכנסת לגבול ממשי x. בפרט זוהי סדרת קושי. הפעלת פונקציית ליפשיץ על סדרת קושי נותנת סדרת קושי (תרגיל 4.2.29). לכן הסדרה $f(q_n)$ מתכנסת.

2. **אם $q'_n \to x$ סדרה רציונלית נוספת המתכנסת ל־x, אז $|q_n - q'_n| \to 0$, ולכן $|f(q_n) - f(q'_n)| \leq L|q_n - q'_n| \to 0$.**

3. **הראינו שאם q_n סדרה רציונלית מתכנסת, אז הערך $\lim f(q_n)$ אינו תלוי בסדרה, אלא רק ב־$\lim q_n$. לכן $f^*(\lim q_n) = \lim f(q_n)$ מוגדרת היטב.**

הפונקציה f^* ממשיכה את f משום שלפי ההנחה על תנאי ליפשיץ, f רציפה על הרציונליים. לכן אם $q_n \to q$ סדרה רציונלית המתכנסת לערך רציונלי, אז $f^*(q) = \lim f(q_n) = f(q)$.

יהיו x, y ממשיים בקטע. נבחר סדרות רציונליות מתכנסות $q_n \to x$ ו־$q'_n \to y$. אז $|f(q_n) - f(q'_n)| \leq L|q_n - q'_n|$, ובגבול $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

4. **יהיו $x < y$ מספרים ממשיים. תהיינה $q_n \to x$ ו־$q'_n \to y$ סדרות רציונליות מתכנסות. מתקיים $q_n < q'_n$ לכל n גדול מספיק, ולכן $f(q_n) \leq f(q'_n)$, ולכן גם בגבול $f(x) = \lim f(q_n) \leq \lim f(q'_n) = f(y)$. אם f עולה במובן החזק, נבחר $x < q'' < q''' < y$ רציונליים, ואז כאשר n גדול מספיק מתקיים $q_n < q'' < q''' < q'_n$ ולכן $f(q_n) < f(q'') < f(q''') < f(q'_n)$, ובגבול $f(x) = \lim f(q_n) \leq f(q'') < f(q''') \leq \lim f(q'_n) = f(y)$.**

□

מסקנה 4.3.16 אפשר להגדיר $a^x = \lim a^{q_n}$ כאשר $q_n \to x$ סדרה מתכנסת של ערכים רציונליים. הפונקציה המתקבלת מקיימת את תנאי ליפשיץ בקטעים סגורים, והיא עולה כאשר $a > 1$ ויורדת כאשר $a < 1$.

מסקנה 4.3.17 פונקציית החזקה a^x מקיימת את חוקי החזקה $(ab)^x = a^x b^x$, $a^{x+y} = a^x a^y$ ו־$a^{xy} = (a^x)^y$ לכל $a > 0$ ו־x, y ממשיים.

הוכחה. **לדוגמא, קח סדרות רציונליות $q_n \to x$ ו־$q'_n \to y$, אז $q_n + q'_n \to x + y$ ולכן $a^{x+y} = \lim a^{q_n + q'_n} = \lim a^{q_n} a^{q'_n} = \lim a^{q_n} \lim a^{q'_n} = a^x a^y$.** □

מסקנה 4.3.18 לכל $a > 0$, הפונקציה $f(x) = a^x$ רציפה.

בסעיף 3.4 הגדרנו את הפונקציה $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, והראינו (בטענה 3.4.8) שהיא מקיימת $\exp(rx) = \exp(x)^r$ לכל $r \in \mathbb{Q}$. בפרט, אם נסמן כמקובל

$$e = \exp(1),$$

נקבל $\exp(r) = e^r$ לכל $r \in \mathbb{Q}$.

תרגיל 4.3.19 (✓) אם f, g פונקציות עולות המתלכדות על הרציונליים, אז הן שוות.

לפי התרגיל, $e^x = \exp(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. כלומר,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4.3.3 לוגריתמים

הפונקציה e^x עולה, ותמונתה היא הקטע הפתוח $(0,\infty)$. לכן אפשר להגדיר את פונקציית הלוגריתם $\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ בתור הפונקציה ההפוכה; $\log(x)=y$ אם ורק אם $e^y=x$.

טענה 4.3.20 פונקציית הלוגריתם רציפה.

הוכחה. מיידי ממשפט 4.2.40 לפי הרציפות שהוכחנו במסקנה 4.3.18. □

כעת אפשר להגדיר

$$x^y = e^{y\log x}.$$

4.3.4 הפונקציות הטריגונומטריות

הפונקציות הטריגונומטריות.

הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

פרק 5

פונקציות גזירות

5.1 הנגזרת

עבור קטע I, נסמן ב־I° את פנים הקטע.

הגדרה 5.1.1 *תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I, ותהי $x \in I^\circ$ נקודה בפנים הקטע.* ***הנגזרת של f בנקודה*** *היא הגבול*

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

אם הגבול קיים.

תרגיל 5.1.2 (✓) בדוק ששתי ההגדרות לגבול שקולות זו לזו. **הדרכה.** $y(h) = x + h$ היא פונקציה רציפה, ראה טענה 4.2.8.

אומרים שהפונקציה **גזירה בקטע** אם היא גזירה בכל נקודה של הקטע. במקרה כזה, $f' : I^\circ \to \mathbb{R}$ היא פונקציה ממשית בזכות עצמה.

לנגזרת יש משמעות של שינוי רגעי. אם היא קיימת, לפונקציה יש **ישר משיק** בנקודה.

לנגזרת יש גם משמעות פיזיקלית. למשל, אם חושבים על המשתנה הממשי כציר הזמן, אז הנגזרת מתארת את השינוי הרגעי בערך הפונקציה. אם f מתארת מרחק, אז הנגזרת f' מתארת מהירות. אם f מתארת מהירות, הנגזרת שלה מתארת תאוצה.

משפט 5.1.3 *תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I, ותהי $x \in I^\circ$ נקודה בפנים הקטע. אם f גזירה ב־x אז היא רציפה שם.*

הוכחה. נסמן $\mathcal{E}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. לפי ההנחה הגבול $f'(x) = \lim_{h\to0} \mathcal{E}(h)$ קיים. אבל $f(x+h) = f(x) + h\mathcal{E}(h)$, ולכן $\lim f(x+h) = \lim(f(x) + h\mathcal{E}(h)) = f(x) + \lim_{h\to0} h \cdot \lim_{h\to0} \mathcal{E}(h) = f(x) + 0 \cdot f'(x) = f(x)$. □

הערה 5.1.4 תהי f פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$. משוואת הישר המשיק לפונקציה בקטע היא $y = f'(x_0)(x - a_0) + f(x_0)$.

5.1.1 כללי גזירה

טענה 5.1.5 תהיינה f,g פונקציות גזירות בנקודה x. אז גם $f+g$ גזירה שם ו־$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{(f+g)(y)-(f+g)(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}+\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right)\\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}+\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}=f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

□

טענה 5.1.6 תהיינה f,g פונקציות גזירות בנקודה x. אז גם fg גזירה שם ו־$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\frac{(f(y)-f(x))g(y)+f(x)(g(y)-g(x))}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}g(y)+f(x)\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right)\\ &= \lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)g(y)+f(x)\lim_{y\to x}\left(\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

□

טענה 5.1.7 הנגזרת של פונקציה קבועה היא 0.

הוכחה. **אם** $f(x)=c$ **לכל** x **בסביבה של נקודה** x_0, **אז** $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$. □

מסקנה 5.1.8 אם c קבוע, אז $(cf)'=cf'$.

הוכחה. **לפי טענה 5.1.6 על נגזרת של מכפלה ולפי טענה 5.1.7**, $(cf)'=c'f+cf'=cf'$. □

טענה 5.1.9 (כלל השרשרת) תהי g פונקציה גזירה ורציפה בנקודה a, ו־f פונקציה גזירה בנקודה $g(a)$. אז $f\circ g$ גזירה בנקודה a, ונגזרתה שווה ל־$(f\circ g)(a)=f'(g(a))g'(a)$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{y\to g(a)}\frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(g(a))\cdot g'(a).\end{aligned}$$

החלפת המשתנה בגבול (בהנחה ש־$g'(a)\neq 0$) מוצדקת על ידי משפט 4.2.8. □

טענה 5.1.10 תהי f פונקציה גזירה בנקודה $x=a$ והפיכה בסביבה של הנקודה. אז f^{-1} גזירה בנקודה $f(a)$, ונגזרתה שם היא $(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$.

הוכחה. (חסרה)

לפי ההנחה $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}$, כלומר ההרכבה היא פונקציית הזהות בסביבת הנקודה a. לו היינו יודעים שהפונקציה ההפוכה גזירה, אפשר לגזור לפי המשפט הקודם ולקבל $1=\mathrm{id}'(a)(f^{-1})'(f(a))f'(a)$ ולכן $(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$. לכן די להוכיח שהפונקציה f^{-1} גזירה. □

5.2 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

טענה 5.2.1 הנגזרת של $f(x)=x$ היא קבוע.

תרגיל 5.2.2 ($\checkmark$) העזר בטענה 5.1.6 כדי לחשב את הנגזרת של x^n לכל n.

הנגזרת של פונקציית הסינוס בנקודה אפס שווה, לפי ההגדרה, לגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. אבל מהו הגבול הזה?

טענה 5.2.3 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

הוכחה. **מוכיחים את אי־השוויון $\sin x<x<\tan x$ באמצעות הגדרת אורך הקשת כסופרימום של סכומי אורכי הקירובים הלינאריים למקוטעין שלה.** □

מסקנה 5.2.4 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=0$.

הוכחה. **נכפיל בצמוד:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x)))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x)))}\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

לפי הגבול שבטענה 5.2.3 ולפי הרציפות של $\sin(x)$ ו־$\frac{1}{1+\cos(x)}$ (הנובעת מטענה 4.2.7). □

מסקנה 5.2.5 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$.

הוכחה. **לפי הגבול 5.2.4.** □

משפט 5.2.6 *לכל* x *מתקיים* $\sin'(x)=\cos(x)$ ו־$\cos'(x)=-\sin(x)$.

הוכחה. **כידוע** $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ ו־$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$. **לכן**

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}\\ &= \sin(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\lim_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\cos(x)=\cos(x);\end{aligned}$$

לפי הגבולות שחושבו לעיל; ו־

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\\ &= \cos(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h}=-\sin(x).\end{aligned}$$

□

טענה 5.2.7 הנגזרת של $f(x)=e^x$ היא $f'(x)=e^x$.

הוכחה. **עלינו לחשב את הגבול**

$$(e^x)'=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}.$$

בטענה 3.4.4 הוכחנו שלכל h **מתקיים** $e^h=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}$. **מכיוון ש־**$2^{k-1}\leq k!$ **לכל** $k\geq2$, **אם** $|h|<2$, **מתקיים**

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\leq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^k}{2^{k-1}}=\frac{h^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{|h|}{2})^{k-2}=\frac{h^2}{2}\frac{1}{1-|h|/2},$$

ולכן

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right|=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}\leq\frac{h}{2-|h|},$$

וזה שואף לאפס כאשר $h\to0$. **הוכחנו, אם כך, ש־**$\frac{e^h-1}{h}\to1$ **כאשר** $h\to0$. **מכאן ש־**$(e^x)'=e^x$. □

מסקנה 5.2.8 $(\log y)'=\frac{1}{y}$. אכן, נתבונן בפונקציה $f(x)=e^x$ ובפונקציה ההפוכה $\log(y)=f^{-1}(y)$. עבור הפונקציה f מתקיים $f'(x)=e^x=f(x)$, ולכן לפי נוסחת הגזרת לפונקציה ההפוכה, $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f(x)}$, כלומר $(\log y)'=\frac{1}{y}$, וזאת לכל $y>0$.

תרגיל 5.2.9 (✓) חשב את $\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}$.

5.3 נקודות קיצון

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I, ו־x_0 נקודה בפנים הקטע. הנקודה x_0 היא **נקודת מקסימום** מקומית של הפונקציה, אם יש סביבה של x_0 שבה מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$ לכל x. הנקודה x_0 היא **נקודת מינימום** מקומית של הפונקציה, אם יש סביבה של x_0 שבה מתקיים $f(x_0) \leq f(x)$ לכל x. בשני המקרים x_0 נקראת **נקודת קיצון**.

כרגיל, x_0 היא נקודת מינימום של f אם ורק אם היא נקודת מקסימום של $-f$, ולכן בדרך כלל די לדון באחד הסוגים.

משפט 5.3.1 *תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) וגזירה בנקודה $x_0 \in (a,b)$ שהיא נקודת קיצון שלה. אז $f'(x_0) = 0$.*

הוכחה. לפי ההנחה $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ מימין לנקודה ו־$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ משמאל לנקודה, או להיפך. נובע מכאן שהגבול הימני גדול או שווה לאפס, והשמאלי קטן או שווה לאפס (או להיפך), והרי הם שווים. □

אומרים שפונקציה **גזירה פעמיים** אם פונקציית הנגזרת שלה היא גזירה בעצמה.

משפט 5.3.2 *תהי f פונקציה המוגדרת וגזירה פעמיים בקטע (a,b), ותהי $x_0 \in (a,b)$. נניח כי $f'(x_0) = 0$ ו־$f''(x_0) > 0$. אז x_0 היא נקודת מינימום מקומית של f.*

5.4 משפט הערך הממוצע

משפט 5.4.1 (משפט רול) *תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). נניח ש־$f(a) = f(b)$. אז קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$f'(c) = 0$.*

הוכחה. מכיוון שהפונקציה רציפה, משפט ויירשטראס מראה שיש לה נקודות מינימום ומקסימום בקטע $[a,b]$. אם הנקודות האלה שתיהן בקצות הקטע, אז f קבועה. אחרת יש נקודת קיצון בפנים הקטע, ואז הנגזרת שם מתאפסת לפי משפט 5.3.1. □

משפט 5.4.2 (משפט הערך הממוצע של לגראנז') *תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אז קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

הוכחה. נתבונן בפונקציה $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. גם הפונקציה הזו רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח. בנוסף לזה $g(a) = f(a) = g(b)$. לכן משפט רול מבטיח שיש נקודה $c \in (a,b)$ שבה $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

מסקנה 5.4.3 תהי f פונקציה גזירה בקטע פתוח, שהנגזרת שלה בקטע היא זהותית אפס. אז f היא פונקציה קבועה.

הוכחה. תהיינה a,b נקודות בקטע. תנאי משפט הערך הממוצע מתקיימים, ולכן קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$, כלומר $f(a) = f(b)$. □

מסקנה 5.4.4 פונקציה גזירה בעלת נגזרת חסומה בקטע מקיימת את תנאי ליפשיץ, ולכן היא רציפה במידה שווה.

עבור פונקציות בקטע כלשהו:

גזירה עם נגזרת חסומה

$\Downarrow$

תנאי ליפשיץ

$\Downarrow$

רציפה במידה שווה

תרגיל 5.4.5 ($\checkmark$) תהי f פונקציה רציפה באפס. תהי $x_n \to 0$ סדרה מונוטונית יורדת, כך שהסימנים של $f(x_n)$ מתחלפים.

1. הוכח ש־$f(0) = 0$.
2. אם f גזירה ברציפות באפס אז $f'(0) = 0$.

משפט 5.4.6 (משפט הערך הממוצע של קושי) ***תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a, b). כמו־כן נניח שהנגזרת של g אינה מתאפסת בקטע הפתוח. אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש־$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.***

מן ההנחה נובע לפי משפט רול שהמכנה $g(b) - g(a)$ אינו מתאפס. משפט הערך הממוצע של לגראנז' הוא המקרה $g(t) = t$.

הוכחה. **נגדיר** $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$. **גם הפונקציה הזו רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח. לפי משפט הערך הממוצע של לגראנז', יש נקודה** $c \in (a, b)$ **כך ש־**$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$, **אבל** $F(b) - F(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$, **ומאידך** $F'(c) = f'(c) - \frac{g(b)-g(a)}{b-a} g'(c)$. **לכן** $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

תרגיל 5.4.7 ($\checkmark$)
1. הוכח שקיים מספר $0 < x < 2$ כך ש־ $e^x = \frac{e^2-1}{2}$. **הדרכה**. משפט הערך הממוצע עבור $f(x) = e^x$ בקטע $[0, 2]$.
2. הוכח של־ $0 < b$, $\frac{b}{1+b^2} < \arctan(b) < b$. **הדרכה**. משפט הערך הממוצע עבור $f(x) = \arctan(x)$ בקטע $[0, b]$.
3. הוכח שקיים פתרון בקטע $(0, 6)$ למשוואה $\frac{3x^2}{e^x} = \frac{124}{e(e^4-1)}$. **הדרכה**. משפט הערך הממוצע עבור $f(x) = x^3$ ו־$g(x) = e^x$ בקטע $[1, 5]$ (שמוכל ב־ $(0, 6)$).
4. הוכח שלכל $1 < a < b < 2$ מתקיים $\frac{1}{2}(b^2 - a^2) < \log(b) - \log(a) < \frac{1}{8}(b^2 - a^2)$. **הדרכה**. משפט הערך הממוצע המוכלל עבור $f(x) = log(x)$, $g(x) = x^2$ בקטע $[a, b]$, ואז חסימה לפי $1 < a < b < 2$.

5.5 רציפות הנגזרת

גם אם פונקציה גזירה בכל נקודה בקטע, הנגזרת עצמה אינה מוכרחה להיות רציפה. אם הנגזרת רציפה, אומרים שהפונקציה **גזירה ברציפות**.

דוגמא 5.5.1 הפונקציה $f(x) = x^2\sin(1/x)$ גזירה בכל הישר, אבל הנגזרת אינה רציפה ב־$x = 0$.

משפט הערך הממוצע קושר ערכים של הנגזרת למנות מהצורה $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. עובדה זו מאפשרת לקשור גם בין ערכים שונים של הנגזרת עצמה.

משפט 5.5.2 *תהי f פונקציה המוגדרת ורציפה בקטע ש־a בפנים שלו, וגזירה בקטע המנוקב. אם $L = \lim_{x\to a} f'(x)$ קיים, אז f גזירה בנקודה $x = a$, והנגזרת שווה לגבול.*

היינו, לנגזרת אין נקודות אי־רציפות סליקות.

הוכחה. תהי $h_n \to 0$ סדרה המתכנסת לאפס (ולעולם אינה שווה לאפס). לפי משפט הערך הממוצע, קיימים h_n' כך ש־$0 < h_n' < h_n$ או $h_n < h_n' < 0$, כך ש־$f'(h_n') = \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$. מכיוון ש־$h_n' \to 0$, לפי ההנחה $f'(h_n') \to L$, ואז גם $\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} \to L$, כלומר $f'(a) = L$. □

(אפשר, בקלות יחסית, להוכיח באותו אופן ש־f גזירה בנקודה $x = a$ אפילו אם ידוע רק שקיים גבול חד־צדדי $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ או $\lim_{x\to a^-} f'(x)$. היינו, כל נקודות אי־הרציפות של הנגזרת הן מסוג שני.)

תרגיל 5.5.3 הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ גזירה בקטע הסגור $[-1,1]$, אבל הנגזרת אינה חסומה שם.

5.6 כלל לופיטל

כללי לופיטל מאפשרים לחשב גבולות מכמה צורות לא מוגדרות: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, וכתוצאה מכך גם $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0 ואפילו $\infty - \infty$.

המקרה הבסיסי הוא זה של הגבולות מהצורה $\frac{0}{0}$.

משפט 5.6.1 *תהיינה f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. נניח ש־$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. אם הגבול $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה לו.*

הוכחה. מכיוון שהמנה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרת בסביבה של a, יש סביבה שבה $g'(x) \neq 0$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים $\delta > 0$ כך שבקטע המנוקב $0 < |x-a| < \delta$, המוכל בסביבה לעיל, מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. תהיינה x_1, x_2 נקודות בקטע המנוקב הנ"ל, מאותו עבר של a. לפי משפט הערך הממוצע של קושי, $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$. נשמור את x_1 קבוע, ונשאיף $x_2 \to a$ כדי לקבל $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| \leq \epsilon$. לכן $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

באופן דומה לזה אפשר לחשב גבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$.

משפט 5.6.2 *תהיינה f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. נניח ש־$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. אם הגבול $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה לו.*

הוכחה. **על ידי החלפת f ב־$-f$ אפשר להניח ש־$L \geq 0$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים $\delta > 0$ כך שבקטע המנוקב $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon/2$. תהיינה x_1, x_2 נקודות בקטע המנוקב הנ"ל. לפי משפט הערך הממוצע של קושי, $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon/2$.**

נסמן $P_f(x_1; x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)}$ ובדומה $P_g(x_1; x_2) = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_2)}$. לפי ההנחה, אם שומרים את x_1 קבוע ומשאיפים $x_2 \to a$, מתקיים $P_f(x_1; x_2), P_g(x_1; x_2) \to -1$. לכן (על ידי החלפת δ בערך קטן יותר במקרה הצורך) מתקיים גם $\left|\frac{P_g(x_1;x_2)}{P_f(x_1;x_2)} - 1\right| < \epsilon'$, כאשר ϵ' קטן דיו להבטיח ש־$(L+\epsilon/2)(1+\epsilon') < L+\epsilon$; זה מבטיח גם $(L-\epsilon/2)(1-\epsilon') > L-\epsilon$.

כעת, מכיוון ש־$\frac{f(x_2)}{g(x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \frac{P_g(x_1;x_2)}{P_f(x_1;x_2)}$, מתקיים עבור x_2 בקטע המנוקב ש־$\left|\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - L\right| < \epsilon$.

הוכחנו, אם כך, ש־ $L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. □

הערה 5.6.3 משפטי לופיטל נכונים גם כאשר $L = \pm\infty$.

הערה 5.6.4 משפטי לופיטל נכונים גם כאשר $x \to \infty$ או $x \to -\infty$, וגם עבור גבולות חד־צדדיים.

תרגיל 5.6.5 (גבולות מהצורה $0 \cdot \infty$) נניח ש־$f \to 0$ ו־$g \to \infty$. אז $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ הוא גבול מהצורה $\frac{0}{0}$.

תרגיל 5.6.6 (גבולות מהצורה 1^∞) נניח ש־$f \to 1$ ו־$g \to \infty$. אז $\log(f^g) = g \log f$ הוא גבול מהצורה $0 \cdot \infty$.

תרגיל 5.6.7 (גבולות מהצורה ∞^0) נניח ש־$f \to \infty$ ו־$g \to 0$. אז $\log(f^g) = g \log f$ הוא גבול מהצורה $0 \cdot \infty$.

תרגיל 5.6.8 (גבולות מהצורה 0^0) נניח ש־$f, g \to 0$. אז $\log(f^g) = g \log f$ הוא גבול מהצורה $0 \cdot \infty$.

תרגיל 5.6.9 (גבולות מהצורה $\infty - \infty$) נניח ש־$f, g \to \infty$. אם $\frac{f}{g} \to 1$, אז $f - g = (\frac{f}{g} - 1)g$ הוא גבול מהצורה $0 \cdot \infty$. אחרת הגבול ניתן לחישוב ישירות.

תרגיל 5.6.10 העזר בכללי לופיטל כדי לחשב את הגבולות הבאים:

1. $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log(x)}$ כאשר $x \to 1$.
2. $\sqrt{x^2+3x+7} + x$ כאשר $x \to -\infty$.
3. $\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ כאשר $x \to \infty$.
4. $x^{1/\log(x)}$ כאשר $x \to \infty$.

5.7 נקודות ותחומי עליה וירידה

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a. הפונקציה **עולה בנקודה** אם $f(x) < f(a) < f(y)$ לכל $x < a < y$ בסביבה; **ועולה חלש בנקודה** אם $f(x) \le f(a) \le f(y)$. בדומה לזה, הפונקציה **יורדת בנקודה** אם $f(x) > f(a) > f(y)$ לכל $x < a < y$ בסביבה, **ויורדת חלש בנקודה** אם $f(x) \ge f(a) \ge f(y)$. אם פונקציה עולה בקטע, אז היא עולה בכל נקודה שלו.

טענה 5.7.1 אם f גזירה בנקודה a ו־$f'(a) > 0$, אז f עולה ממש בנקודה זו.

טענה 5.7.2 אם f גזירה בנקודה a ועולה חלש שם, אז $f'(a) \ge 0$.

דוגמא 5.7.3 תהי $d(x)$ פונקציית דיריכלה, שהוגדרה בתרגיל 4.2.10. הראה ש־$xd(x)$ רציפה ב־$x = 0$ ולא באף נקודה אחרת, ואינה גזירה באף נקודה. הראה ש־$x^2d(x)$ גזירה ב־$x = 0$, אבל אינה רציפה באף נקודה אחרת.

דוגמא 5.7.4 הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x + 4x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \end{cases}$ היא בעלת נגזרת $f'(0) = 1$, ואכן עולה בנקודה $x = 0$, אבל לא באף סביבה שלה.

דוגמא 5.7.5 פונקצייתויירשטראס $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(k^n \pi x)$, כאשר $k \ge 7$ מספר טבעי איזוגי ו־ $\frac{1+\frac{3}{2}\pi}{k} \le a < 1$, היא רציפה בכל הישר; אינה גזירה באף נקודה; אינה עולה ואינה יורדת באף נקודה ומפילא אינה מונוטונית באף קטע.

הדיאגרמה הבאה מסכמת כמה אפשרויות עבור פונקציה הגזירה בסביבה של נקודה a. החץ בשורה העליונה הפיך אם הפונקציה גזירה ברציפות.

$$\begin{tikzcd}
f'(x) > 0 \text{ בסביבה} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & f'(a) > 0 \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dl, "/" marking] \\
f \text{ עולה בסביבה} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & f \text{ עולה ב־} a \arrow[d, Rightarrow] \\
f \text{ עולה חלש בסביבה} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & f \text{ עולה חלש ב־} a \arrow[d, Rightarrow] \\
f'(x) \ge 0 \text{ בסביבה} \arrow[r, Rightarrow] & f'(a) \ge 0
\end{tikzcd}$$

5.7.1 מרחבי פונקציות

הפונקציה **גזירה n פעמים** אם הנגזרת ה־n שלה קיימת, **וגזירה ברציפות n פעמים** אם הנגזרת ה־n־ית שלה גזירה. עבור קטע I, מגדירים

$$C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \text{גזירה ברציפות } n \text{ פעמים } f\};$$

$$D^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \text{גזירה } n \text{ פעמים } f\}.$$

מרחבי הפונקציות החשובים הללו מוכלים זה בזה: $C^\infty \subseteq \cdots \subseteq C^2 \subseteq D^2 \subseteq C^1 \subseteq D^1 \subseteq C^0$, כאשר $C^\infty = \bigcap C^n$ הוא מרחב הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים (פונקציה כזו היא **חלקה**).

ביבליוגרפיה

[1] Silvanus Thompson, “Calculus Made Easy: Being a very-simplest introduction to those beautiful methods which are generally called by the terrifying names of the Differentia”, 1914. https:\\www.gutenberg.org\files\33283\33283-pdf.pdf