

## חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תש"פ, מועד א'

**משך המבחן.** שלוש שעות.

חומר עזר מותר בשימוש: אין; גם לא מחשבון. יש לנמק באופן מלא את התשובות, ולהגיע לצורה הפשוטה ביותר של הפתרון.  
שימו לב: שאלות 1, 2 הן חובה. יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות 3-7. המספרים בסוגריים לפני כל סעיף מציינים את מספר הנקודות עבור תשובה מלאה.

1. (חובה). תרגם את הטענות הבאות לפי ההגדרה. בתשובה מותר להשתמש בפעולות השדה, ביחס הסדר, בקשרים הלוגיים ('וגם', 'או', 'לא') ובכמתים 'לכל' ו-'קיים', אבל לא במושגים שהגדרנו (כגון גבול, סביבה, חסם או התכנסות).

(א)  $\langle 2 \rangle$  הסדרה  $\frac{3+(-1)^n}{n}$  אינה מתכנסת ל-5.

(ב)  $\langle 2 \rangle$  הפונקציה  $\frac{1}{x-2}$  רציפה במידה שווה בקטע  $[5, 6]$ .

(ג)  $\langle 2 \rangle$  הנגזרת של  $\arctan(x)$  בנקודה  $x = 1$  היא  $1/2$ .

(ד)  $\langle 2 \rangle$  לקבוצה  $\{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$  יש חסם עליון.

(ה)  $\langle 2 \rangle$  הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  אינה רציפה מימין ב- $x = 0$ .

2. (חובה). מצא דוגמא נגדית לכל אחת מן הטענות הבאות.

(א)  $\langle 3 \rangle$  "אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בקטע  $[3, 7]$ , אז היא חסומה שם."

(ב)  $\langle 4 \rangle$  "אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $0 < b_n$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ ."

(ג)  $\langle 5 \rangle$  "אם  $f(x)$  רציפה ב- $(0, 1)$  וב- $(-1, 0)$  וחסומה ב- $[-1, 1]$  אז היא רציפה ב-0."

(ד)  $\langle 6 \rangle$  "אם  $0 < f(x) < 1$  ורציפה במידה שווה בקטע  $(1, 2)$  אז  $\frac{f(x)}{1-f(x)}$  רציפה במידה שווה שם."

3. חשב את הגבולות הבאים (כולל נימוקים מלאים).

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 7x + 8}{x^3 - 8} \quad \langle 6 \rangle \text{ (א)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(4x) - 2 \cdot \sin(2x)}{(x - \pi)^3} \quad \langle 6 \rangle \text{ (ב)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \quad \langle 6 \rangle \text{ (ג)}$$

4. (א)  $\langle 10 \rangle$  הפונקציה  $f(x)$  רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ . הוכח: אם  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$ , אז  $f$  גזירה מימין ב- $a$  ו- $f'(a) = L$ . הצעה: משפט הערך הממוצע.

(ב)  $\langle 8 \rangle$  הוכח: אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $a_n \rightarrow 0$ .

5. (א)  $\langle 9 \rangle$  הוכח: אם  $\lim(a_n) = A$  ו- $\lim(b_n) = B$ , אז  $\lim(a_n b_n) = AB$ .

(ב)  $\langle 9 \rangle$  הוכח שלכל  $x > 1$  מתקיים  $\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{x^2+1} < \arctan(x) < \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ .

6.  $\langle 18 \rangle$  הפונקציה  $f$  רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ . הוכח שהפונקציה חסומה בקטע (זהו משפט וירשטראס על פונקציות רציפות בקטע סגור).

7. (א)  $\langle 12 \rangle$  הצע בניה של שדה המספרים הממשיים. עליך לתאר במדויק מהו מספר ממשי, כיצד מחברים שני מספרים ממשיים, וכיצד קובעים אם מספר ממשי גדול ממש מאפס.

(ב)  $\langle 6 \rangle$  הבניה מסעיף א' מבוססת על המספרים הרציונליים. מה יקרה אם נחליף בה את הרציונליים בממשיים? הסבר.

**דף נוסחאות.**  $\sin(0) = \sin(2\pi) = \sin(4\pi) = 0$  .  $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$  .  $\sin(\pi/2) = 1$  .  
 $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

**בהצלחה.**