חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תש"פ, בחינה לדוגמא – **פתרון**

יש לנמק באופן מלא את התשובות, ולהגיע לצורה הפשוטה ביותר של הפתרון.
שימו לב: שאלות $1,2$ הן חובה. יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות 3-7. המספרים בסוגריים לפני כל סעיף מציינים את מספר הנקודות עבור תשובה מלאה.

1. (חובה). תרגם את הטענות הבאות לפי ההגדרה. בתשובה מותר להשתמש בפעולות השדה, ביחס הסדר, בקשרים הלוגיים ('וגם', 'או', 'לא') ובכמתים 'לכל' ו־'קיים', אבל לא במושגים שהגדרנו (כגון גבול, סביבה, חסם או התכנסות).

(א) $\langle 2\rangle$ הגבול של x^3 כאשר $x \to 5$ הוא 125.
פתרון. לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-5| < \delta$ אז $|x^3-125| < \epsilon$.

(ב) $\langle 2\rangle$ $\sup\{r^2 \in \mathbb{Q} \mid r < 3\} = 9$.
פתרון. לכל $r \in \mathbb{Q}$, אם $r < 3$ אז $r^2 \leq 9$; ולכל $\epsilon > 0$ קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש־$r < 3$ אבל $r^2 > 9-\epsilon$.

(ג) $\langle 2\rangle$ הסדרה $a_n = \sin(1/n)$ אינה מתכנסת.
פתרון. לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שעבור אינסוף ערכי n מתקיים $|\sin(1/n) - L| > \epsilon$.

(ד) $\langle 2\rangle$ הפונקציה $f(x) = 1/x$ רציפה במידה שווה בקרן $[1,\infty)$.
פתרון. לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $1 \leq x < y < x+\delta$ אז $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \epsilon$.

(ה) $\langle 2\rangle$ לפונקציה x^3+x נגזרת חיובית ממש (דהיינו גדולה מ־0) לכל x ממשי.
פתרון. לכל x קיים $a > 0$ כך שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - a\right| < \epsilon$.

2. (חובה). מצא דוגמא נגדית לכל אחת מן הטענות הבאות.

(א) $\langle 3\rangle$ "כל פונקציה רציפה וחסומה ב־$(-2,2)$ היא גזירה."
פתרון. למשל $f(x) = |x|$; אינה גזירה ב־0.

(ב) $\langle 4\rangle$ "פונקציה רציפה בקטע $(2,3)$ היא חסומה."
פתרון. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ אינה חסומה.

(ג) $\langle 5\rangle$ "תהיינה a_n, b_n סדרות חיוביות. אם $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ אז בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$."
פתרון. לסדרות $a_n = \begin{cases} n & n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$ ו־$b_n = n/a_n$ יש תת־סדרות חסומות ולכן הן אינן שואפות לאינסוף, אבל מכפלתן היא $a_nb_n = n\to\infty$.

(ד) $\langle 6\rangle$ "אם $f(x)$ רציפה במידה שווה בכל הישר, אז גם $f(x^2)$ רציפה במידה שווה בכל הישר."

פתרון. הפונקציה $f(x)=x$ רציפה במידה שווה בכל הישר, אבל $f(x^2)=x^2$ אינה רציפה במידה שווה (משום ש־$(x+1/x)^2-x^2=2+1/x^2\not\to 0$).

3. חשב את הגבולות הבאים (כולל נימוקים מלאים).

(א) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to\infty}\log(e^x+1)-x$.

פתרון. $\log(e^x+1)-x=\log(e^x+1)-\log(e^x)=\log(\frac{e^x+1}{e^x})\to\log(1)=0$ בגלל רציפות פונקציית הלוגריתם.

(ב) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to 1/2}\frac{1-\sin(\pi x)}{(1-4x^2)^2}$.

פתרון. המונה והמכנה שואפים לאפס. לפי כלל לופיטל עבור מנות מהצורה $\frac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{1-\sin(\pi x)}{(1-4x^2)^2}=\lim_{x\to 1/2}\frac{-\pi\cos(\pi x)}{2(-8x)(1-4x^2)}=\frac{\pi}{16}\lim_{x\to 1/2}\frac{1}{x}\lim_{x\to 1/2}\frac{\cos(\pi x)}{1-4x^2}.$$

באותה דרך, $\lim_{x\to 1/2}\frac{\cos(\pi x)}{1-4x^2}=\lim_{x\to 1/2}\frac{-\pi\sin(\pi x)}{-8x}=\frac{\pi}{4}$ שהרי־$\sin(\pi/2)=1$, ולכן הגבול המקורי הוא $\frac{\pi^2}{32}$.

(ג) $\langle 6\rangle$ $\lim_{x\to 0^+}\sin(x)^{1/\log(x)}$.

פתרון. נסמן $L=\lim_{x\to 0^+}\sin(x)^{1/\log(x)}$, אז לפי רציפות הלוגריתם $\log(L)=\lim_{x\to 0^+}\log(\sin(x)^{1/\log(x)})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\sin x)}{\log x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)/\sin(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\cos(x)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$, ולכן $L=\exp(1)=e$.

4. תהי $f:[1,2]\to[1,2]$ פונקציה גזירה.

(א) $\langle 6\rangle$ הוכח שקיים פתרון למשוואה $f(x)=x$.

פתרון. הפונקציה $f(x)-x$ רציפה, ולפי ההנחה $f(2)-2\le 0\le f(1)-1$. לפי משפט ערך הביניים הפונקציה עוברת בנקודה שבה $f(t)-t=0$.

(ב) $\langle 12\rangle$ נניח ש־ $f'(x)=1+f(x)^2$ לכל $0\le x\le 1$. הוכח שלמשוואה $f(x)=x$ יש בדיוק פתרון אחד.

פתרון. אם היו שני פתרונות $s<t$, אז ביניהם היתה נקודה $s<p<t$ כך ש־ $1=\frac{s-t}{s-t}=\frac{f(s)-f(t)}{s-t}=f'(p)=1+f(p)^2$, ומכאן $f(p)=0$, וזו סתירה להנחה שערכי f בקטע $[1,2]$.

5. (א) $\langle 8\rangle$ הוכח: אם f רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה עם נגזרת חיובית ממש ב־(a,b), אז f עולה ב־$[a,b]$.

(ב) $\langle 10\rangle$ הפונקציה f רציפה ב־$[0,\infty)$, ו־ $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$. הוכח ש־f רציפה במידה שווה ב־ $[0,\infty)$.

6. $\langle 18\rangle$ הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. הוכח שהפונקציה רציפה במידה שווה.

7. (א) $\langle 4\rangle$ הגדר מתי שדה סדור הוא ארכימדי.

פתרון. שדה סדור הוא ארכימדי אם לכל $a>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$na>1$.

(ב) $\langle 4 \rangle$ הוכח ששדה המספרים הרציונליים הוא ארכימדי.

פתרון. כל מספר רציונלי חיובי אפשר להציג בצורה p/q כאשר $p, q \in \mathbb{N}$, והרי $(2q)(p/q) = 2p > 1$.

(ג) $\langle 10 \rangle$ הסבר בקצרה מדוע כל שדה ארכימדי מוכל בשדה המספרים הממשיים.

פתרון. הוכחנו שלכל שדה סדור F יש השלמה $\widehat{F}$ שהיא שדה שלם לסדרות המכיל את F כתת־שדה צפוף; וכך שאם F ארכימדי גם $\widehat{F}$ ארכימדי. יהי F שדה ארכימדי. אז $F \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן $\widehat{F} \subseteq \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. אבל אם שדה שלם מוכל בשדה ארכימדי, הם שווים. לכן $F \subseteq \widehat{F} = \mathbb{R}$.

דף נוסחאות. $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi/2) = 0$. $\log(e) = 1$.

בהצלחה.