חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תשפ"א, מועד א' - **פתרון**

1. נגדיר סדרות (a_n) ו־(b_n) לפי $a_1 = 8$, $b_1 = 2$, ועבור $1 < n$:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n; \qquad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n.$$

(א) הוכח שהסדרה $a_n - b_n$ מתכנסת, ומצא את גבולה.

פתרון. לפי ההגדרה $a_1 - b_1 = 6$ ולכל $n > 1$ מתקיים

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n) - (\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n) = \frac{1}{3}(a_n - b_n),$$

כלומר $a_n - b_n = 2 \cdot 3^{2-n} \to 0$.

(ב) הוכח שהסדרה $a_n + b_n$ מתכנסת ומצא את גבולה.

פתרון. לפי ההגדרה $a_1 + b_1 = 10$ ולכל $n > 1$ מתקיים $a_{n+1} + b_{n+1} = (\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n) + (\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n) = a_n + b_n$, כלומר זוהי סדרה קבועה וגבולה הוא הערך הקבוע 10.

(ג) הוכח שהסדרות a_n ו־b_n מתכנסות, ומצא את גבולן.

פתרון. חיבור וחיסור: $\lim a_n = \frac{1}{2}(\lim(a_n + b_n) + \lim(a_n - b_n)) = 5$, ו־$\lim b_n = \frac{1}{2}(\lim(a_n + b_n) - \lim(a_n - b_n)) = 5$.

2. קבע, בתלות בפרמטרים הממשיים p, t, האם הטור הבא מתכנס; מותר להשאיר זוג ערכים אחד לא מוכרע ובלבד שתציינו באופן ברור מהו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{2^{pn} \cdot (n!)^t}.$$

פתרון. נשתמש במבחן המנה:

$$\frac{\frac{(4(n+1))!}{2^{p(n+1)} \cdot ((n+1)!)^t}}{\frac{(4n)!}{2^{pn} \cdot (n!)^t}} = \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{2^p(n+1)^t}.$$

אם $t > 4$ מעלת המכנה גבוהה משל המונה, ואז המנה שואפת לאפס והטור מתכנס. אם $t < 4$ אז מעלת המונה גבוהה יותר, ואז המנה שואפת לאינסוף והטור בוודאי מתבדר. אם $t = 4$ הגבול הוא $\lim \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{2^p(n+1)^4} = 4^4 2^{-p}$, וכעת: אם $p < 8$ הטור מתבדר, ואם $p > 8$ הטור מתכנס. במקרה $t = 4$ ו־$p = 8$ מבחן המנה נכשל (הטור מתכנס במקרה זה, אבל ההוכחה קשה יותר).

3. תהי h פונקציה רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(0,1)$. נניח שקיים $\lambda > 0$ כך שלכל $x \in (0,1)$ מתקיים $h(x) > \lambda$. הוכח שהפונקציה $H(x) = \frac{1}{h(x)}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

פתרון. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|h(x)-h(y)| < \epsilon\lambda^2$. כעת לכל x, y בקטע המקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים

$$|H(x)-H(y)| = \left|\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(y)}\right| = \frac{|h(y)-h(x)|}{h(x)h(y)} < \frac{|h(x)-h(y)|}{\lambda^2} < \epsilon.$$

בהרצאה הוכחנו גרסה מסויימת של **כלל לופיטל** עבור גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$. להלן המשפט עם הוכחה. השיבו לשאלות המתייחסות לו המופיעות מיד אחריו.

משפט. תהיינה f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. נניח ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. אם הגבול $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה לו.

הוכחה. מכיוון שהמנה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרת בסביבה של a, יש סביבה שבה $g'(x) \neq 0$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים $\delta > 0$ כך שבקטע המנוקב $0 < |x-a| < \delta$, המוכל בסביבה לעיל, מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. תהיינה x_1, x_2 נקודות בקטע המנוקב הנ"ל, מאותו עבר של a. לפי משפט הערך הממוצע של קושי, $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$. נשמור את x_1 קבוע, ונשאיף $x_2 \to a$ כדי לקבל $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| \leq \epsilon$. לכן $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

4. הסבירו בקיצור רב:

(א) כיצד מצדיק משפט הערך הממוצע את אי־השוויון $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$?

פתרון. תהיינה $x_1 < x_2$ נקודות בקטע מאותו עבר של a, אז לפי משפט הערך הממוצע יש נקודה $x \in (x_1, x_2)$ כך ש־ $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}$, אבל כעת

$$0 < \min\{|x_1-a|, |x_2-a|\} < |x-a| < \max\{|x_1-a|, |x_2-a|\} < \delta$$

ולכן $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| = \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$.

(ב) באי־השוויון האחרון בהוכחה כתוב $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| \leq \epsilon$.

i. על איזה ערכים של x_1 חל אי־השוויון הזה?
פתרון. על ערכים המקיימים $|x_1 - a| < \delta$.

ii. הסבר את הוכחת אי־השוויון מן הטיעונים שהובאו לפניו.
פתרון. x_1 קבוע. ידוע שלכל x_2 בין a ל־x_1 מתקיים $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$. נשאיף $x_2 \to a$, אז $f(x_2), g(x_2) \to 0$ לפי ההנחה, ולכן $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \to \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ וממילא $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| \to \left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right|$. ערכי הפונקציה $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right|$ כולם קטנים מ־ϵ, ולכן הגבול $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right|$ קטן או שווה ל־ϵ.

iii. מדוע לא יכולנו להסיק כי $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)}-L\right|<\epsilon$ (קטן ממש)?

פתרון. משום שגבול של פונקציה שכל ערכיה קטנים ממש מאפסילון עלול להיות שווה לאפסילון.

iv. על פי ההוכחה לעיל, לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אז $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|\le\epsilon$, "ולכן $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$". אבל בהגדרת הגבול של פונקציה לפי קושי נדרש אי־שוויון חזק (כלומר נדרש כי המרחק קטן ממש מאפסילון). הסבר כיצד, אם כך, ההוכחה תקפה בכל זאת.

פתרון. מלכתחילה יכולנו לבחור δ קטן עוד יותר, כך שאם $0<|x-a|<\delta$ היינו מקבלים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\frac{1}{2}\epsilon$, ואז ההוכחה לעיל היתה מראה ש־$\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)}-L\right|\le\frac{1}{2}\epsilon<\epsilon$.

5. הוכיחו בקצרה את המשפט הבא.

משפט. תהיינה f,g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x=a$. נניח ש־$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$. אם $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$, אז גם $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

(שימו לב לשני ההבדלים ביחס למשפט הנתון בראש הדף: הגבולות חד־צדדיים, וגבול המנה הוא מינוס אינסוף. הוכיחו בדייקנות ובמידת פירוט דומה לזו שניתנה לעיל, והדגישו את המקומות שבהם ההוכחה שונה.)

פתרון.

מכיון שהמנה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרת בסביבה של a, יש סביבה שבה $g'(x)\neq 0$. יהי M מספר כלשהו (קטן ככל שיהיה). לפי ההנחה קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(a,a+\delta)$ מתקיים $\frac{f'(x)}{g'(x)}<M$. תהיינה x_1,x_2 נקודות כך ש־$a<x_2<x_1<a+\delta$. לפי משפט הערך הממוצע של קושי, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}<M$. נשמור את x_1 קבוע, ונשאיף $x_2\to a$ כדי לקבל $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\le M$ (!). לכן $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.