חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תשפ"א, מועד א'

משך המבחן. שעתיים.

<u>הנחיות</u>:

I מותר להשתמש בכל חומר כתוב, באופן עצמאי בלבד.

II חובה להעתיק בתחילת הבחינה את ההצהרה הבאה:

הפתרון המוגש הוא פרי עבודתי העצמאית, ללא שקיבלתי עזרה מאף אדם.

III עליכם לציין באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. עמודים לא מסומנים לא ייבדקו.

IV עליכם לבחור שתי שאלות מבין 1–3 (פתרון שלושתן יזכה ב־5 נקודות בונוס). שאלות 4 ו־5 הן חובה.

V לשאלות 1–3 ניקוד $5+15+25$ כאשר הניקוד הגבוה יינתן לשאלה הטובה יותר. שאלה 4 תקבל 25 נקודות, ושאלה 5 — 35 (הניקוד המקסימלי האפשרי: 105).

1. נגדיר סדרות (a_n) ו־(b_n) לפי $a_1=8$, $b_1=2$, ועבור $1<n$:

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n; \qquad b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n.$$

(א) הוכח שהסדרה a_n-b_n מתכנסת, ומצא את גבולה.

(ב) הוכח שהסדרה a_n+b_n מתכנסת ומצא את גבולה.

(ג) הוכח שהסדרות a_n ו־b_n מתכנסות, ומצא את גבולן.

2. קבע, בתלות בפרמטרים הממשיים p,t, האם הטור הבא מתכנס; מותר להשאיר זוג ערכים אחד לא מוכרע ובלבד שתציינו באופן ברור מהו.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{pn}\cdot(n!)^t}.$$

3. תהי h פונקציה רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(0,1)$. נניח שקיים $\lambda>0$ כך שלכל $x\in(0,1)$ מתקיים $h(x)>\lambda$. הוכח שהפונקציה $H(x)=\frac{1}{h(x)}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

בהרצאה הוכחנו גרסה מסויימת של **כלל לופיטל** עבור גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$. להלן המשפט עם הוכחה. השיבו לשאלות המתייחסות לו המופיעות מיד אחריו.

משפט. תהיינה f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. נניח ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. אם הגבול $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה לו.

הוכחה. **מכיוון שהמנה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרת בסביבה של a, יש סביבה שבה $g'(x) \neq 0$. יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה קיים $\delta > 0$ כך שבקטע המנוקב $0 < |x-a| < \delta$, המוכל בסביבה לעיל, מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. תהיינה x_1, x_2 נקודות בקטע המנוקב הנ"ל, מאותו עבר של a. לפי משפט הערך הממוצע של קושי, $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$. נשמור את x_1 קבוע, ונשאיף $x_2 \to a$ כדי לקבל $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| \leq \epsilon$. לכן $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.** □

4. הסבירו בקיצור רב:

(א) כיצד מצדיק משפט הערך הממוצע את אי־השוויון $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} - L\right| < \epsilon$?

(ב) באי־השוויון האחרון בהוכחה כתוב $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| \leq \epsilon$.

i. על איזה ערכים של x_1 חל אי־השוויון הזה?

ii. הסבר את הוכחת אי־השוויון מן הטיעונים שהובאו לפניו.

iii. מדוע לא יכולנו להסיק כי $\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L\right| < \epsilon$ (קטן ממש)?

iv. על פי ההוכחה לעיל, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-a| < \delta$ אז $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \epsilon$, "ולכן $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$". אבל בהגדרת הגבול של פונקציה לפי קושי נדרש אי־שוויון חזק (כלומר נדרש כי המרחק קטן ממש מאפסילון). הסבר כיצד, אם כך, ההוכחה תקפה בכל זאת.

5. הוכיחו בקצרה את המשפט הבא.

משפט. תהיינה f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. נניח ש־ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. אם $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, אז גם $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(שימו לב לשני ההבדלים ביחס למשפט הנתון בראש הדף: הגבולות חד־צדדיים, וגבול המנה הוא מינוס אינסוף. הוכיחו בדייקנות ובמידת פירוט דומה לזו שניתנה לעיל, והדגישו את המקומות שבהם ההוכחה שונה.)

בהצלחה.