חשבון אינפיניטסימלי 88-132

פרופ' ע. וישנה

תשפ"א, מבחן לדוגמא

משך המבחן. שעתיים.

<u>הנחיות</u>:

I מותר להשתמש בכל חומר כתוב, באופן עצמאי בלבד.

II חובה להעתיק בתחילת הבחינה את ההצהרה הבאה:

הפתרון המוגש הוא פרי עבודתי העצמאית, ללא שקיבלתי עזרה מאף אדם.

III עליכם לציין באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. עמודים לא מסומנים לא ייבדקו.

IV כל השאלות חובה.

V לשאלות 1-3 ניקוד $10+20+20$ כאשר הניקוד הנמוך יינתן לשאלה הפחות טובה. שאלה 4 תקבל 20 נקודות, ושאלה 5 – 30.

1. הסדרות a_n, b_n מוגדרות באינדוקציה באופן הבא: $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, ולכל $1 < n$ מתקיים

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

הוכח שהסדרות מתכנסות לאותו גבול.

2. עבור כל אחד מהערכים $P = 1, 2, 4$, קיבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi n}{P} + \frac{1}{n}\right)$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

3. תהי f פונקציה המוגדרת ורציפה בקרן $[0, \infty)$, ומקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. הוכיחו שהפונקציה $f(x)^2$ רציפה במידה שווה בקרן.

בהרצאה הוכחנו את הלמה של קנטור ואת משפט בולצאנו־ויירשטראס:

טענה. תהי $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ סדרת קטעים סגורים מקוננים, כך ש־$\operatorname{diam} I_n \to 0$.
אז החיתוך $\bigcap I_n$ הוא נקודון (כלומר קבוצה בת נקודה אחת, x_0).
בנוסף, אם (x_n) סדרה המקיימת $x_n \in I_n$ לכל n, אז $x_n \to x_0$.

משפט בולצאנו־ויירשטראס. לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת.

הוכחה. תהי (a_n) סדרה חסומה, כלומר, קיימים b, c כך שלכל n מתקיים $b \le a_n \le c$. נגדיר באינדוקציה סדרת קטעים סגורים $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ שכל אחד מהם מכיל אינסוף מאברי הסדרה (a_n), וסדרת אינדקסים $n_1 < n_2 < \cdots$, כך ש־$a_{n_m} \in I_m$.

נבחר $I_1 = [b, c]$ ו־$n_1 = 1$. עבור $m \ge 1$, נניח שבחרנו קטע I_m המכיל אינסוף מאברי הסדרה (a_n), ואינדקס n_m כך ש־$a_{n_m} \in I_m$.

נכתוב $I_m = [b_m, c_m]$, ונתבונן בפירוק $I_m = [b_m, \frac{b_m+c_m}{2}] \cup [\frac{b_m+c_m}{2}, c_m]$. מכיוון שהקטע I_m מכיל אינסוף אברים של הסדרה (a_n), אחד מתת־הקטעים מוכרח להכיל אינסוף אברים שלה, ואנו בוחרים אותו להיות I_{m+1}; כך $I_m \supset I_{m+1}$, כדרוש. אנו בוחרים $n_{m+1} > n_m$ כך ש־$a_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$. לפי הבניה, $\operatorname{diam} I_{m+1} = \frac{1}{2} \operatorname{diam} I_m$. מכאן ש־$\operatorname{diam} I_m = 2^{-(m-1)}(c-b) \to 0$. לפי הלמה של קנטור, תת־הסדרה a_{n_m} מתכנסת אל הנקודה היחידה שבחיתוך $\bigcap I_m$. $\square$

4. (א) אם $I = [r, s]$ קטע סגור, מסמנים ב־$I^\circ = (r, s)$ את הקטע הפתוח המתאים לו.
   i. הוכיחו שאם (I_n) היא סדרת קטעים סגורים המקיימת את תנאי הלמה של קנטור, אז $\bigcap I_n^\circ$ היא קבוצה בת נקודה אחת לכל היותר.
   ii. תן דוגמא לסדרת קטעים I_n המקיימת את תנאי הלמה של קנטור, כך שגם החיתוך $\bigcap I_n^\circ$ אינו ריק.
   iii. תן דוגמא לסדרת קטעים J_n המקיימת את תנאי הלמה של קנטור, כך שהחיתוך $\bigcap J_n^\circ$ הוא ריק.

   (ב) בהוכחת משפט בולצאנו־ויירשטראס:
   i. "אנו בוחרים $n_{m+1} > n_m$ כך ש־$a_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$". מה בוחרים כאן (את m, את n_m, את n_{m+1}, את $a_{n_{m+1}}$ או את I_{m+1})? מניין שאפשר לעשות זאת?
   ii. נניח שהסדרה הנתונה היא $a_n = \frac{1}{n}$, והקבועים הם $b = 0$ ו־$c = 1$. כתוב במפורש את סדרת הקטעים הסגורים I_m המתקבלת בהוכחה, ואת תת־הסדרה a_{n_m}. לאן מתכנסת תת־הסדרה הזו?

5. הוכח בעזרת משפט בולצאנו־ויירשטראס: לכל סדרה שהיא יש תת־סדרה המתכנסת במובן הרחב.

(הערה: לו היה זה מבחן אמיתי, חלוקת הנקודות בין שאלות 4 ו־5 היתה הפוכה. שמרתי על חלוקת הנקודות כפי שהיא במבחני מועדי א' וב')

בהצלחה.