

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 2, 88-162

פרופ' ע. וישנה
סמסטר ב', מועד א', תשס"ט

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר מותר בשימוש: דפי עזר (מצורפים) וטבלאות התפלגות.

1. שטחה של מושבת חיידקים עגולה הגדלה בלי הפרעה מתפלג מערכית, עם תוחלת $\theta = 2\pi$. נסמן ב- R את רדיוס המושבה.

(א) מצא את פונקציית הצפיפות של R .

(ב) מה התוחלת של R ?

(ג) מה השונות של R ?

2. משקלה של ככר לחם תקנית מתפלג נורמלית, עם תוחלת 750 גרם וסטיית תקן 20 גרם.

(א) מה הסיכוי לכך שעשרה ככרות לחם תקניים ישקלו יחד פחות מ-7450 גרם?

(ב) מאפיייה מייצרת ככרות שמשקלם מתפלג $N(\mu, 20^2)$. כתוב את ההשערות H_0 ו- H_1 הנחוצות כדי להוכיח שהמאפיה עוברת על החוק, ומוכרת ככרות מתחת למשקל התקני.

(ג) בדוק, ברמת מובהקות 95%, את ההשערה שהמאפיה עוברת על החוק, אם בחנות נקנו עשרה ככרות שמשקלם הכולל 7450 גרם.

3. במשך השנה, אורכה של פרסומת בטלוויזיה מתפלג נורמלית עם תוחלת 60 שניות וסטיית תקן 12 שניות.

(א) מה אחוז הפרסומות שאורכן מעל 90 שניות?

(ב) איך מתפלג אורכו של מקבץ בן חמש פרסומות, בהנחה שהפרסומות בלתי תלויות זו בזו? בכמה מקבצים יש לפחות פרסומת אחת שאורכה מעל 90 שניות?

(ג) ביום מסויים שודרו 40 פרסומות, שאורכן הממוצע היה $60 + \delta$ שניות. מה צריך להיות הערך של δ כדי שאפשר יהיה להוכיח, ברמת מובהקות 95%, שאורך הפרסומות באותו יום היה חריג במכוון?

4. חוקרי מס הכנסה מעוניינים לבדוק האם יש קשר בין העלמת מס להפקעת מחירים. הם דוגמים 60 דוכנים בשוק, ומגלים שהיו 15 מקרים של העלמת מס, ו-24 מקרים של הפקעת מחירים.

(א) מהו המספר הצפוי של דוכנים שגם מעלימים מס וגם מפקיעים מחירים, אם העבירות אינן תלויות זו בזו?

(ב) כתוב את השערת האפס ואת ההשערה האלטרנטיבית. באיזה מבחן יש לבדוק את ההשערה? (כמה דרגות חופש?)

(ג) בפועל התברר שהיו 11 דוכנים שעברו את שתי העבירות. בדוק את ההשערה ברמת מובהקות של 90% ושל 95%.

(ד) מה תהיה ההשפעה על התוצאות אם יתברר שלצד 60 הדוכנים שנבדקו בשוק, היו עוד 60 שלא נבדקו כלל?

5. ארנבת משוטטת במבוך שיש בו שני חדרים. אם היא בחדר הגדול, הסיכוי שתהיה שם לאחר שעה הוא 0.9; אחרת היא עוברת לחדר הקטן. אם היא בחדר הקטן, הסיכוי שתשאר שם לאחר שעה הוא 0.6.

(א) מה שיעור הזמן שהארנבת מבילה בחדר הגדול?

(ב) לאחר שהוסיפו גלגל מרוץ בחדר הקטן, הארנבת משנה את התנהגותה. מעכשיו, כשהיא בחדר הגדול, הסיכוי שלה להשאר בו הוא 0.9 אם היתה בו גם בשעה הקודמת, אבל רק 0.8 אם היתה לפני שעה בחדר הקטן. הסיכוי להשאר בחדר הקטן נותר ללא שינוי. תאר (באופן גרפי) תהליך מרקוב מתאים למצב החדש.

(ג) מה שיעור הזמן שהארנבת מבילה בחדר הגדול לאחר השינוי?

בהצלחה.