

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה

סמסטר ב', מועד א', תשע"א

יש לענות על כל השאלות. השאלה הטובה ביותר שווה 30 נקודות, והחלשה ביותר – 10; השאר שוות 20 נקודות כל אחת. משך המבחן: שעה וחצי (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: הכל למעט ספרים. אנא הקיפו במסגרת תשובות סופיות.

1. נגדיר סדרה של משתנים מקריים באופן הבא: $X_0 = \lambda$ הוא קבוע, ולכל n , בהנתן $X_n, X_{n+1} \sim P(X_n)$ ¹.

(א) חשבו את התוחלת $E(X_n)$.

(ב) חשבו את השונות $V(X_n)$.

(ג) לכל $n < m$, חשבו את השונות המשותפת $Cov(X_n, X_m)$.

(ד) הראו שלכל $i > j > n > m$, $X_m - X_n$ ו- $X_j - X_i$ בלתי מתואמים.

2. אורך החיים של נורה מתפלג מעריכית, עם תוחלת μ . חשבו את הסיכוי שמבין שתי נורות מסוג זה, אחת תדלוק לפחות כפליים זמן מרעותה.

3. ידוע שצבע העיניים של אדם הוא כחול, ירוק, חום או תרוג², ביחסים של 4 : 3 : 2 : 1, בהתאמה³. בקהל נוכחים 400 בני אדם.

(א) מה הסיכוי⁴ לכך שמספר בעלי העיניים הירוקות עולה על 90? הגדירו את המשתנה המקרי הרלוונטי, ותארו את ההתפלגות שלו.

(ב) מה הסיכוי לכך שמספר בעלי העיניים התרוגות עולה על מספר בעלי העיניים החומות והכחולות, יחד, ב-30 לפחות?

4. כמה פעמים, בתוחלת, יש להטיל קוביה הוגנת, עד שהסכום של שתי הטלות רצופות הוא 9 בפעם הראשונה?⁵

5. התפוחים שנקטפו מעץ אחד שוקלים 170, 175, 180, 185, 190 גרמים. התפוחים שגדלו על עץ שני שוקלים 185, 190, 195, 200, 210 גרמים. מניחים שהשונות של משקלי התפוחים אחידה לכל העצים במדינה.

(א) באיזו רמת מובהקות אפשר להסיק שיש הבדל בין שני העצים? נסחו במדויק את המודל ואת ההשערות הרלוונטיות.

(ב) מיצאו רווח סמך ברמת מובהקות של 95% להפרש התוחלות, והסבירו את הקשר לסעיף א'.

בהצלחה.

¹זו התפלגות פואסון.

²תרוג הוא צבע צהוב-אמדם, כשל אתרוג.

³כלומר, הסיכוי לעיניים בצבע ירוק הוא 2/10, וכן הלאה.

⁴תנו מספר, ואל תסתפקו בנוסחה.

⁵לפותרים את השאלה באמצעות תהליך מרקוב: אנא הגדירו באופן ברור את מצבי התהליך.