

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה
מועד ב', תשע"ב

יש לענות על כל השאלות. השאלה הטובה ביותר שווה 30 נקודות, והחלשה ביותר - 10; השאר שוות 20 נקודות כל אחת. משך המבחן: שלוש שעות (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: הכל למעט ספרים.

1. נגדיר סדרה של משתנים מקריים באופן הבא: $X_0 = \lambda$ הוא קבוע, ולכל n , בהנתן X_n , $X_{n+1} \sim P(X_n)$.

(א) חשבו את התוחלת $E(X_n)$.

(ב) חשבו את השונות $V(X_n)$.

(ג) לכל $n < m$, חשבו את השונות המשותפת $Cov(X_n, X_m)$.

2. בכל אחד משני קנקנים יש ליטר אחד של מים. מעבירים כמות אקראית X (בהתפלגות אחידה) מהקנקן הראשון לשני, ואז מחזירים כמות אקראית Y (בהתפלגות אחידה) מהקנקן השני לראשון. כתוב את פונקציית הצפיפות של כמות המים בקנקן הראשון, $1 - X + Y$, לאחר שתי ההעברות.⁽¹⁾

3. שני חתולים מתחרים בציד עכברים. הראשון צד כבר 1200 עכברים, והוא מוסיף לצוד שניים מדי יום. השני חדש בשכונה, והוא צד מדי יום מספר עכברים כפי שמורה לו קובייה הוגנת (המקבלת ערכים בטווח $1, \dots, 6$).

(א) הוכח שבהסתברות 1, החתול השני ישיג את הראשון בסופו של דבר.

(ב) נסה להעריך כמה ימים יידרשו לכך.⁽²⁾

(ג) מה הסיכוי שאחרי 900 ימים, החתול השני צד (בסך הכל) יותר עכברים מן הראשון?

4. הציונים בבחינה מתפלגים נורמלית, $N(\mu, \sigma^2)$. חמישה תלמידים קיבלו את הציונים 84, 82, 80, 78, 76.

(א) כתוב רווח סמך לתוחלת μ , בהנחה שהשונות היא $\sigma^2 = 16$.

(ב) בהנחה שהשונות σ^2 אינה ידועה:

i. חשב את האומדן חסר ההטיה $s^2 = \hat{\sigma}^2$ של השונות.

ii. כתוב רווח סמך לתוחלת μ .

5. כמה פעמים, בתוחלת, יש להטיל קובייה⁽³⁾ הוגנת עד לקבלת שלוש תוצאות זהות רצופות?

בהצלחה.

¹ הצעה: חשב את ההסתברות $P(1 - X + Y < a)$, ראשית כאשר $a > 1$ ואחר-כך כאשר $0 < a < 1$.
² ניקוד מלא ינתן לנימוק מתקבל על הדעת, ללא קשר לאיכות התוצאה.
³ לקובייה יש 6 פאות.