Bar-Ilan University
אוניברסיטת בר-אילן

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה, 88-165

פרופ' ע. וישנה

מועד א' - **פתרון**, תשע"ו

1. שוברים מקל באורך מטר אחד בנקודה אקראית (הנבחרת בהתפלגות אחידה). אחר־כך חוזרים על אותו תהליך בכל אחד משני החלקים שהתקבלו. נסמן ב־A, B, C, D את אורכי החלקים שהתקבלו באופן הזה.

(א) האם מקדם המתאם בין A ל־D חיובי או שלילי? הסבר (אין צורך לחשב). **פתרון**. מכיוון ש־A ו־D הם חלקים (בפרופורציות בלתי תלויות) מחלקים משלימים, ככל ש־A גדול יותר, כך סביר ש־D יהיה קטן יותר. לכן מקדם המתאם $\mathrm{Cov}(A, D)$ שלילי.

(ב) מצא את מקדם המתאם $\rho(A, B) = \frac{\mathrm{Cov}(A,B)}{\sqrt{\mathbf{V}(A)\mathbf{V}(B)}}$ (שימו לב: B ולא D). **פתרון**. נסמן ב־X את אורך השבר הראשון, כלומר $X = A + B$. לפי השאלה, בהנתן X, היחס $A/X \sim U[0, 1]$. לכן

$$\mathbf{V}(A) = \mathbf{V}(\mathbf{E}(A|X)) + \mathbf{E}(\mathbf{V}(A|X)) = \mathbf{V}(\frac{1}{2}X) + \mathbf{E}(\frac{1}{12}X^2) = \frac{1}{4}\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\frac{1}{3} = \frac{7}{12^2}.$$

בדומה לזה

$$\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(A|X)) = \mathbf{E}(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{E}(B) = \mathbf{E}(A) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{E}(AB) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(AB|X)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(XA - A^2|X)) = \mathbf{E}(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X^2) = \frac{1}{6}\frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

לכן $\mathrm{Cov}(A, B) = \mathbf{E}(AB) - \mathbf{E}(A)\mathbf{E}(B) = \frac{1}{18} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{144}$ ומכאן ש־$\rho(A, B) = \frac{-1/144}{7/144} = \boxed{-\frac{1}{7}}$ [בפרט, ככל ש־A גדול יותר, B קטן יותר; זה לא מובן מאליו, כי לכאורה אם A גדול סימן שהוא מגיע מחלק גדול, ואז גם B צריך להיות גדול יותר].

(ג) מצא את התוחלת של המכפלה $ABCD$. **פתרון**. $\mathbf{E}(ABCD) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(ABCD|X)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(AB|X)\mathbf{E}(CD|X)) = \mathbf{E}(\frac{1}{6}X^2\frac{1}{6}(1-X)^2) = \frac{1}{36}\mathbf{E}(X^2 - 2X^3 + X^4) = \frac{1}{36}(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}) = \boxed{\frac{1}{1080}}$. [שימו לב שהתוחלת קטנה בהרבה מ־$\mathbf{E}(A)\mathbf{E}(B)\mathbf{E}(C)\mathbf{E}(D) = \frac{1}{256}$.]

2. מגדירים סדרת משתנים מקיים באופן הבא. $X_0 = 0$, ולכל $n \geq 1$, X_n הוא מספר ההצלחות ב־$X_{n-1} + 1$ ניסויי ברנולי בלתי תלויים, בעלי הסתברות p.

(א) מה ההסתברות למאורע $X_2 = 0$? **פתרון**. כרגיל נסמן $q = 1 - p$. לפי הנתונים, $X_1 = 0, 1$, עם $P(X_1 = 1) = p$; ו־$X_2|X_1 \sim \mathrm{Bin}(1 + X_1, p)$. לכן $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1) = q^2 + q^2p = \boxed{(1+p)(1-p)^2}$.

(ב) חשבו את התוחלת של X_n (כפונקציה מפורשת של n ושל p). **פתרון**. $\mathbf{E}(X_0) = 0$. $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n|X_{n-1}) = \mathbf{E}((1+X_{n-1})p) = p + p\mathbf{E}(X_{n-1})$. באינדוקציה מקבלים ש־$\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}}$.

(ג) חשבו את הגבול $\ell = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n)$. **פתרון**. לפי הסעיף הקודם, $\boxed{\ell = \frac{p}{1-p}}$ כי $p < 1$.

(ד) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \mathbf{V}(X_n)$. **פתרון**. כפי שראינו, $X_n|X_{n-1} \sim \mathrm{Bin}(1+X_{n-1}, p)$. לכן $\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{V}(\mathbf{E}(X_n|X_{n-1})) + \mathbf{E}(\mathbf{V}(X_n|X_{n-1})) = \mathbf{V}(p+pX_{n-1})+\mathbf{E}(pq(1+X_{n-1}) = p^2\mathbf{V}(X_{n-1})+pq+p^2(1-p^{n-1})$. בהנחה שהגבול קיים, מתקיים $\lim \mathbf{V}(X_n) = p^2 \lim \mathbf{V}(X_n) + p$ ולכן $\boxed{\lim \mathbf{V}(X_n) = \frac{p}{1-p^2}}$.
[העובדה שהתוחלת והשונות שואפים לגבול סופי רומזת שאולי יש ל־X_n התפלגות גבולית; אם מישהו ימצא אותה אשמח לשמוע.]

(ה) מה הסיכוי למאורע $\lim_{n\to\infty} X_n = \ell$ (כאשר ℓ הוא הגבול מסעיף ג')? נמק. **פתרון**. אם $\ell = p/(1-p)$ אינו שלם, כמובן שההסתברות היא אפס, כי סדרה של מספרים שלמים אינה יכולה לשאוף לגבול לא שלם. אפילו אם ℓ שלם, כדי שהגבול יהיה ℓ נדרש שממקום מסויים ואילך כל האברים בסדרה יהיו שווים ל־ℓ, אבל ההתפלגות של X_n בהנתן X_{n-1} אינה מנוונת, ולכן הסיכוי לזה דועך אקספוננציאלית לאפס.

3. מטילים קוביה הוגנת בת ארבעה צדדים, המסומנים בספרות $1,2,3,4$, עד שמתקבל ערך הגדול ממש מקודמו. מה תוחלת מספר ההטלות? **פתרון**. נסמן ב־a,b,c,d את התוחלות של מספר ההטלות עד לסוף המשחק, בהנתן שהרגע הוטל $1,2,3,4$ בהתאמה. אז $a = 1+\frac{1}{4}a$, $b = 1+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b$, $c = 1+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c$ ו־$d = 1+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$; לכן $a = 4/3$, $b = (4/3)^2$, $c = (4/3)^3$, $d = (4/3)^4$; והתשובה היא באחד יותר מהממוצע, $\boxed{(4/3)^4}$.

4. מחשבים רווח סמך לתוחלת של התפלגות נורמלית, על פי הממוצע $\bar{X}$ של מדגם בגודל n, והשונות הידועה σ^2 של האוכלוסיה. פי כמה מתארך רווח הסמך אם:

(א) גודל המדגם עולה מ־50 ל־200. **פתרון**. אורכו של רווח הסמך פרופורציונלי ל־$\frac{1}{\sqrt{n}}$, ולכן היחס הוא $\boxed{1/2}$. ככל שהמדגם גדול יותר, תוצאות הנסוי מדוייקות יותר - רווח הסמך קטן יותר.

(ב) הממוצע גדל מ־15 ל־60. **פתרון**. הממוצע אינו משפיע על אורכו של הרווח: $\boxed{1}$.

(ג) סטיית התקן σ גדלה מ־10 ל־40. **פתרון**. אורכו של רווח הסמך פרופורציונלי ל־σ, ולכן היחס הוא $\boxed{4}$.

(ד) רמת המובהקות עולה מ־95% ל־99%. **פתרון**. לפי הטבלה של ההתפלגות הנורמלית, רווח הסמך יגדל פי $\boxed{\frac{2.58}{1.96} \sim 1.3}$. [דהיינו: בהשוואה לנקודת המוצא של רווח הסמך הסטנדרטי, הגדלת הרווח פי 1.3 מספיקה כדי להקטין את הסיכוי לטעות פי 5; הגדלת הרווח פי 2.5 מספיקה כדי להקטין את הסיכוי לטעות פי 5000; זה האפקט של הגדלת המדגם פי 6.25.]