

חוגים ומודולים 88-212

ד"ר ע. וישנה
מועד א', תשס"ו

ענו על ארבע מתוך חמש השאלות בחלק א' (40 נקודות בסך-הכל), ועל שלוש מתוך ארבע השאלות בחלק ב' (60 נקודות).
משך המבחן. שעתיים וחצי.

חלק א'. ענו על ארבע שאלות (10 נקודות לשאלה). בכל השאלות מופיעה טענה **שגויה**, ועליכם לתת לה דוגמא נגדית, שתהיה מלאה בפרטיה, ומנומקת בקיצור נמרץ. חזרה על ההגדרה אינה נחשבת נימוק. דוגמא: לטענה 'כל תחום שלמות הוא חוג ראשי', יש להשיב 'נבחר את החוג...; זהו תחום שלמות מכיוון ש...; האידיאל ... שלו אינו ראשי, מכיוון ש...; לכן זה אינו חוג ראשי'. לא מספיק לומר 'החוג הוא תחום שלמות כי אין לו מחלקי אפס' או 'האידיאל אינו ראשי מכיוון שאין לו יוצר יחיד'.

- הפרד:** "אם $N \leq M$ שניהם מודולים חופשיים מעל חוג R , אז M/N חופשי".
- הפרד:** "בתחום שלמות, כל אידיאל ראשוני שאינו אידיאל האפס, הוא מקסימלי".
- הפרד:** "אם כל המקדמים (פרט לראשון) של פולינום מתוקן בעל מקדמים שלמים מתחלקים ב-7, אז הוא אי-פריק מעל \mathbb{Q} ".
- הפרד:** "אם L אידיאל שמאלי של $M_2(\mathbb{R})$ (ו- $1 \notin L$), אז $L^2 = 0$ ".
- הפרד:** "כל אידיאל של $\mathbb{Z}[i]$, שמכיל ממש את $I = \langle i - 18 \rangle$, הוא ראשוני".

חלק ב'. ענו על שלוש שאלות (20 נקודות לשאלה).

- בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$, נסמן $I_0 = \langle x, y \rangle$, $I_1 = \langle x - 1, y - 2 \rangle$ ו- $I_2 = \langle x - 2, y - 3 \rangle$.
 - הוכח שכל שניים מבין האידיאלים הם קו-מקסימליים.
 - הוכח ש- $R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם עבור I_0 ו- I_2).
 - מצא איבר $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ כך ש- $f \equiv 0 \pmod{I_0}$, $f \equiv -1 \pmod{I_1}$, $f \equiv 4 \pmod{I_2}$.
- צטט גרסאות נכונות ולא טריוויאליות של קריטריון אייזנשטיין ושל הלמה של גאוס.
 - הוכח שהפולינום $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 9$ אי-פריק מעל \mathbb{Q} (הדרכה: העזר בהצבה $(f(x+t) = x^4 + (4t-1)x^3 + (6t^2-3t-4)x^2 + \dots$
- בתחום ראשי, איבר a הוא ראשוני אם ורק אם האידיאל Ra מקסימלי.
 - חשב את חוג המנה $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+2i \rangle$.
- מצא את הצורה הקנונית של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1+t^4 & 1+t^2 \\ 1+t & 1+t^3 \end{pmatrix}$ מעל לחוג (האוקלידי) $R = \mathbb{Z}_2[t]$.
חשב את המימד של R^2/AR^2 כמרחב-וקטורי מעל \mathbb{Z}_2 .