חוגים ומודולים 88-212

ד"ר ע. וישנה

מועד ב', תשס"ו

ענו על ארבע מתוך חמש השאלות בחלק א' (40 נקודות בסך־הכל), ועל שלוש מתוך ארבע השאלות בחלק ב' (60 נקודות).
משך המבחן. שעתיים וחצי.

חלק א'. ענו על ארבע שאלות (10 נקודות לשאלה). בכל השאלות מופיעה טענה **שגויה**, ועליכם לתת לה דוגמא נגדית, שתהיה מלאה בפרטיה, ומנומקת בקיצור נמרץ. חזרה על ההגדרה אינה נחשבת נימוק. דוגמא: לטענה 'כל תחום שלמות הוא חוג ראשי', יש להשיב 'נבחר את החוג...; זהו תחום שלמות מכיוון ש...; האידיאל ... שלו אינו ראשי, מכיוון ש...; לכן זה איננו חוג ראשי'. לא מספיק לומר 'החוג הוא תחום שלמות כי אין לו מחלקי אפס' או 'האידיאל אינו ראשי מכיוון שאין לו יוצר יחיד'.

1. **הפרך**: "אם a ו־ b מחלקי אפס בחוג לא־קומוטטיבי R, אז $ab = 0$".
2. **הפרך**: "הנורמה $N(a+b\sqrt{-2}) = a^2+2b^2$ של כל איבר ראשוני ב־ $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ היא מספר ראשוני".
3. **הפרך**: "אם R תחום ראשי, אז גם $R[x]$ ראשי".
4. **הפרך**: "אם $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ מטריצות כך ש־ $A \sim B$ ו־ $C \sim D$, אז $AC \sim BD$".
5. **הפרך**: "אם $f(x)$ פולינום מעל תחום שלמות R, $0 \neq a = f(0)$, $I = Ra$ ו־ $f(x) \equiv x^4 \pmod{I}$, אז f אי־פריק מעל R".

חלק ב'. ענו על שלוש שאלות (20 נקודות לשאלה).

6. (א) יהי $\phi\colon R \to S$ הומומרפיזם של חוגים, ו־ $I \lhd S$ אידיאל. הוכח ש־ $\phi^{-1}(I)$ אידיאל של R.
   (ב) אם I ראשוני, אז $\phi^{-1}(I)$ ראשוני.
   (ג) מצא הומומרפיזם $\phi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ ואידיאל מקסימלי I של $\mathbb{Q}[x]$, כך ש־ $\phi^{-1}(I)$ אינו מקסימלי.
7. יהי $D \in \mathbb{Z}$ מספר ללא גורמים ריבועיים, עם גורם ראשוני p. נסמן $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.
   (א) i. אם $D < 0$ ו־ $|D|$ אינו ראשוני, אז אין ב־ R איברים עם נורמה p.
   ii. אם $\mp D/p$ אינו שארית ריבועית מודולו p, אז אין ב־ R איברים עם נורמה $\pm p$.
   (ב) אם מתקיים אחד התנאים בסעיף א', אז p אי־פריק ב־R.
   (ג) במקרה זה, R איננו תחום פריקות יחידה (הדרכה: $p \cdot (D/p) = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}$).
8. (א) הגדר תכולה של פולינום מעל תחום פריקות יחידה.
   (ב) מצא את התכולה של $x^2(y^2-y) + 2xy(y+1) + y^2$ כפולינום ב־ x מעל $\mathbb{Q}[y]$ וכפולינום ב־ y מעל $\mathbb{Q}[x]$.
   (ג) הוכח: אם $c(f) = c(g) = 1$, אז $c(fg) = 1$.
9. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 2 & 5 & t \\ -5 & -5 & 60 \end{pmatrix}$, כאשר t הוא מספר שלם. חשב את הפירוק לחבורות ציקליות של $G = \mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3$, עבור כל ערך אפשרי של t, וקבע את סדר החבורה. מצא את $|G/3G|$ כאשר $t = 8, 9, 10$.