אלגברה מופשטת 2, 88-212

ד"ר ע. וישנה

מועד ב', תשס"ז

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות. לכל השאלות ניקוד שווה.

משך המבחן. שעתיים וחצי.

1. יהיו R חוג (לא קומוטטיבי) עם יחידה, ו- $L \subseteq R$ אידיאל שמאלי.
   (א) הראה שלכל $x \in R$, Lx הוא אידיאל שמאלי.
   (ב) נניח ש- L אידיאל שמאלי מינימלי (כלומר אין אידיאל שמאלי P כך ש- $0 \subset P \subset L$). הוכח שאם $Lx \neq 0$, אז Lx מינימלי.
   (ג) הוכח שלתחום שלמות אין אידיאל מינימלי $\neq 0$.

2. אם R חוג קומוטטיבי ו-I אידיאל, מגדירים $\sqrt{I} = \{x \in R | \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$. ידוע שזה אידיאל.
   (א) נניח ש-R תחום פריקות יחידה ו- $a = p_1^{t_1} \cdots p_s^{t_s}$, כאשר p_i ראשוניים (לאו דווקא זרים). הוכח ש- $\sqrt{Ra} = Rp_1 \cap \cdots \cap Rp_s$.
   (ב) יהי $I = 8R$ כאשר $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ (בחוג הזה, $8 = 2^3 = (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})$ הם שני פירוקים שונים לגורמים אי-פריקים). הוכח ש- $\sqrt{I} = \langle 2, 1+\sqrt{-7} \rangle$.

3. יהי $\mathbb{Z} \subseteq R$ תחום שלמות עם אינוולוציה $x \mapsto \bar{x}$ (הומומורפיזם מסדר 2), כך ש- $N(x) = x\bar{x} \in \mathbb{Z}$ לכל $x \in R$.
   (א) נניח ש- $x \in R$ הוא ראשוני, שאינו חבר לאיבר של $\mathbb{Z}$. הוכח שקיים מספר ראשוני $p \in \mathbb{N}$ (במובן הרגיל) כך ש- $N(x) = \pm p$ [רמז: פרק את $N(x)$ לגורמים ב- $\mathbb{Z}$].
   (ב) הראה שבחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, אף מחלק לא הפיך של $s + \sqrt{-1}$ $(s \in \mathbb{Z})$ אינו חבר לאיבר של $\mathbb{Z}$.
   (ג) נניח ש- $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ כאשר $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני. הוכח שקיימים $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש- $a^2 + b^2 = p$. [רמז: פרק את $s + \sqrt{-1}$ לגורמים ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$].

4. (א) יהי R תחום שלמות ו- $I \lhd R$ אידיאל אמיתי. הוכח ש- $R \oplus R/I$ אינו מודול ציקלי מעל R.
   (ב) הוכח שהמטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינן דומות מעל $F[x]$, כאשר F שדה.
   (ג) הוכח שהמטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ אינן דומות מעל $F[x, y]$.