אלגברה מופשטת 2, 88-212

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"א

ענו על כל חמש השאלות. הניקוד המלא לשאלה, מן הטובה לפחות טובה, הוא $30, 25, 20, 15, 10$.
משך המבחן. שעתיים וחצי.

1. (א) הראה ששלושת החוגים $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\epsilon]/\langle\epsilon^2\rangle$ אינם איזומורפיים זה לזה.
   (ב) קבע לאיזה מהם איזומורפי $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$.
   (ג) מצא חוג (עם יחידה) נוסף בן ארבעה אברים, שאינו איזומורפי לאף אחד מהנ"ל.

2. א. מצא את המחלק המשותף המקסימלי של $a = 16 + 5\sqrt{-2}$ ושל $b = 1 + 12\sqrt{-2}$ בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
   ב. פרק את $16 + 5\sqrt{-2}$ לגורמים אי־פריקים בחוג זה. מדוע הם ראשוניים?

3. (א) הוכח את ההכלה $R = \mathbb{Q}((x))[[y]] \subseteq \mathbb{Q}[[y]]((x))$. [1]
   (ב) הראה שזו הכלה אמיתית על־ידי שתצביע על איבר הנמצא בחוג הגדול אבל לא בחוג הקטן.
   (ג) כתוב במפורש מהו ההפכי של $1 - x - y$ בחוג המנה R/y^3R.

4. נקבע בסיס e_1, e_2 למודול $\mathbb{Q}[x]^2$ מעל $\mathbb{Q}[x]$. קבע מה הפירוק של מודול המנה

$$M = \mathbb{Q}[x]^2/\mathrm{span}_{\mathbb{Q}[x]}\{(x^3-1)e_1 + (x^2+1)e_2, (x^2+1)e_1 + (x^3-1)e_2\}.$$

לסכום ישר של מודולים ציקליים. מה המימד של כל אחד מן המודולים הציקליים כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$?

5. יהי M מודול מעל חוג R. תת־מודול $N < M$ נקרא **תת־מודול קטן** של M אם לכל תת־מודול אמיתי $M_1 < M$, גם $N + M_1 < M$. את הטענה "N תת־מודול קטן של M" נסמן ב־$N \leq_s M$.
   (א) הוכח שתת־מודול של תת־מודול קטן של M הוא קטן (אם $K \leq N \leq_s M$ אז $K \leq_s M$).
   (ב) הוכח שסכום של שני תת־מודולים קטנים הוא קטן.
   (ג) יהי R תחום שלמות שאינו שדה, ו־F שדה השברים שלו.
      i. הראה שכל תת־מודול $0 \neq L \leq F$, כמודולים מעל R, כולל איבר $0 \neq t \in R$.
      ii. הראה ש־$R \leq F$ הוא תת־מודול קטן.[2]

[1] את החוגים בונים מבפנים החוצה: באגף שמאל מדובר בחוג $(\mathbb{Q}[[y]])((x))$, כלומר, החוג של טורי לורן ב־x מעל החוג של טורי החזקות הפורמליים $\mathbb{Q}[[y]]$; באגף ימין $(\mathbb{Q}((x)))[[y]]$ הוא החוג של טורי החזקות הפורמליים ב־y מעל לחוג של טורי לורן ב־x.

[2] הצעה: נניח $R + L = F$, ויהי $0 \neq b \in R$; הסבר מדוע $\frac{1}{tb} \in R + L$ והסק $\frac{1}{b} \in L$. כעת הוכח ש־$F = L$. נמק כל צעד.