

## אלגברה מופשטת 2, 88-212

פרופ' ע. וישנה  
מועד א', תשע"ב

ענו על כל חמש השאלות. הניקוד המלא לשאלה, מן הטובה לפחות טובה, הוא 25, 25, 25, 15, 10. **משך המבחן**. שעתיים וחצי.

1. יהי  $F$  שדה. הגדר  $(1)$  שיכון של חוגים  $(2)$   $F[[x]] \rightarrow \prod F[x]/\langle x^n \rangle$ . הראה ששיכון זה אינו על. הוכח שהחוגים אינם איזומורפיים  $(3)$ .

2. נסמן  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ .

(א) מצא את כל האידיאלים המקסימליים של  $R$  המכילים את  $2 + \sqrt{-14}$ .

(ב) נסמן  $P = \langle 2, \sqrt{-14} \rangle$ . מצא את היוצר של האידיאל  $P^2$  (שהוא ראשי).

(ג) כתוב את לוחות החיבור והכפל של חוג המנה  $R/P^2$ . האם זהו תחום שלמות? מדוע?

3. (א) הסבר מדוע  $S = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] \cong \mathbb{Z}[y]/\langle y^2 + 9y + 22 \rangle$ .

(ב) מצא את כל ההומומורפיזמים  $(4)$   $R \rightarrow S$  כאשר  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}] \cong \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 + 7 \rangle$ .

(ג) כמה הומומורפיזמים יש בכיוון ההפוך, כלומר  $S \rightarrow R$ ?

4. יהי  $R$  תחום שלמות, ו- $M$  מודול מעל  $R$ . נגדיר  $t(M) = \{x \in M \mid \exists 0 \neq a \in R : ax = 0\}$ .

(א) הוכח ש- $t(M)$  הוא תת-מודול של  $M$ .

(ב) הוכח ש- $t(M/t(M)) = 0$   $(5)$ .

(ג) יהי  $N \leq M$  תת-מודול. הוכח ש- $N/t(N) \hookrightarrow M/t(M)$   $(6)$ .

5. נתון המודול  $M = \mathbb{C}[x]/\langle x \rangle \oplus \mathbb{C}[x]/\langle x-3 \rangle \oplus \mathbb{C}[x]/\langle x^4 \rangle$ , סכום ישר של שלושה מודולים ציקליים מעל  $R = \mathbb{C}[x]$ .

(א) מצא מספר טבעי  $n$  ומטריצה  $A \in M_n(\mathbb{C})$  כך ש- $M$  איזומורפי ל- $\mathbb{C}^n$  כמודול מעל  $R$  לפי  $x \cdot v = Av$ .

(ב) פרק את  $\mathbb{C}^n$  לסכום ישר של מודולים ציקליים כאשר הכפל בסקלר מוגדר לפי  $x \cdot v = A^2v$   $(7)$ .

**בהצלחה.**

<sup>1</sup>כלומר, כתוב את הנוסחה המגדירה את הפונקציה.

<sup>2</sup>שיכון הוא הומומורפיזם חד-חד-ערכי.

<sup>3</sup>כמוכך, הטענה אינה נובעת מכך שהשיכון שהגדרת אינו על. **רמז:** העזר בחבורות ההפיכים

<sup>4</sup>של חוגים עם יחידה

<sup>5</sup> $M/t(M)$  הוא כמוכך מודול המנה.

<sup>6</sup>כלומר, שקיים שיכון  $N/t(N) \rightarrow M/t(M)$

<sup>7</sup>אותם  $n$  ו- $A$  מהסעיף הקודם.