תאוריה סטטיסטית 1, 5 2-88
ד"ר ע. וישנה
מועד א', תשס"ה

יש לענות על שאלות 1 (30 נקודות) ו- 5 (20 נקודות), ועל אחת מבין שאלות $2,3,4$ (50 נקודות). אין להשתמש בחומר עזר פרט לדפי הסיכום שחולקו בכתה, ובמחשבון. בהצלחה

1. נתון ש- $X \sim N(0,4)$, $Y \sim N(2,1)$, $Z \sim \chi^2_3$ ו- $W \sim \chi^2_5$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים. מצא פונקציות של X,Y,Z,W שהן בעלות ההתפלגויות הבאות:
   (א) התפלגות χ^2 עם שתי דרגות חופש ועם שמונה דרגות חופש.
   (ב) התפלגות t_3 ו- t_8.
   (ג) התפלגות $F_{3,6}$ ו- $F_{5,5}$.
   (ד) התפלגות אחידה $U(0,1)$.

2. נניח ש- T_0, T_1 הם אומדים חסרי הטיה לפרמטר θ, עם שונויות $V(T_i) = \sigma_i^2$ ושונות משותפת $\mathrm{Cov}(T_0,T_1) = \rho\sigma_0\sigma_1$. כמובן, $-1 \le \rho \le 1$.
   (א) הוכיחו ש- $T_\alpha = \alpha T_1 + (1-\alpha)T_0$ הוא אומד חסר הטיה של θ (לכל $\alpha \in \mathbb{R}$).
   (ב) חשבו את הפונקציה $f(\alpha) = V(T_\alpha)$ [בידקו ש- $f(\alpha) = \sigma_\alpha^2$ עבור $\alpha = 0,1$].
   (ג) נסמן ב- α^* את נקודת הקיצון של f. הוכיחו שזו נקודת מינימום ולא מקסימום.
   (ד) חשבו את $f(\alpha^*)$ כפונקציה של ρ, σ_0, σ_1.
   (ה) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על ρ שיבטיח כי $f(\alpha^*) < \sigma_0^2$. השלימו: T_α הוכ אומד טוב יותר משני האומדים T_0, T_1, אלא אם...
   (ו) הוכיחו: אם T_0, T_1 הם אומדים חסרי הטיה בעלי שונות מינימלית במדה שווה, אז $T_0 = T_1$ (בהסתברות 1).

3. בהתפלגות $F(\theta)$ המשתנה מקבל ערכים $0,1,2,\dots$. נתון שהסטטיסטי $X_1 + X_2$ מספיק עבור מדגם בגודל 2. בנוסף, ידוע שההתפלגות של X_1 בהנתן $X_1 + X_2$ היא התפלגות אחידה. נוכיח שמדובר בהתפלגות גאומטרית.
   (א) נסמן את ההתפלגות ב- $\Pr\{X = n\} = p_n(\theta)$. השלם לפי משפט הפירוק: קיימות פונקציות g ו- h כך ש- $p_s(\theta)p_t(\theta) = g(?,?)h(s,t)$.
   (ב) חשב את ההסתברות של המאורע $X_1 = k$ בהנתן $X_1 + X_2 = n$, במונח g ו- h בלבד. אנו מניחים שהסתברות זו שווה ל- $1/(n+1)$. הסק מכאן משוואה על ערכים של h.
   (ג) בעזרת המשוואה המתקבלת בסעיף ב', הכוח ש- $p_s(\theta)p_{t+1}(\theta) = p_{s+1}(\theta)p_t(\theta)$.
   (ד) הוכח ש- $p_n(\theta) = a(\theta)b(\theta)^n$ עבור פונקציות a,b (שאינן תלויות ב- n).
   (ה) חשב את $a(\theta)$ מתוך $b(\theta)$, והסק שההתפלגות אכן גאומטרית.

(ו) הוכח שבהתפלגות גאומטרית, הסכום הוא סטטיסטי מספיק עבור מדגם בכל גודל.

(ז) הוכח שבהנתן הסכום $X_1+X_2+X_3$ של משתנים גאומטריים בלתי תלויים, ההתפלגות של השלשה הסדורה (X_1,X_2,X_3) היא אחידה (במרחב השלשות האפשריות).

4. בהתפלגות פואסונית $X\sim P(\lambda)$:

(א) מצא סטטיסטי $T=f(X)$ שהוא אומד חסר הטיה ל- e^λ.

(ב) חשב את השונות של T מן הסעיף הקודם.

(ג) הוכח שהסכום $S=X_1+\ldots+X_n$ הוא סטטיסטי מספיק עבור מדגם בגודל n, והוכח (למשל באינדוקציה) שהסכום בעל התפלגות $P(n\lambda)$.

(ד) הראה, על-ידי חישוב של הסתברות מותנית, שההתפלגות המותנית של X_1 בהנתן S היא בינומית $B(S,1/n)$.

(ה) חשב את התוחלת $T'=E(T|S)$. הסבר מדוע זהו UMVUE עבור e^λ.

(ו) חשב את השונות של T' והראה שהיא קטנה מן השונות שהתקבלה בסעיף ב'.

5. $X_1,\ldots,X_n$ מדגם בלתי תלוי ממשתנה X שמתפלג $N(\sigma^2,\sigma^2)$, כאשר σ פרמטר.

(א) מצא כמות צירית Q עבור σ, כך ש- Q בלתי-תלוי בסטטיסטי $\bar{X}=(X_1+\ldots+X_n)/n$.

(ב) מה ההתפלגות של הכמות הצירית Q?

(ג) מצא רווח סמך מהצורה $\{\sigma<a\}$ ברמת מובהקות 95%. איזה ערך נחוץ לאתר בטבלה לצורך זה?

(ד) נניח שמדגם בגודל $n=2$ והערכים שהתקבלו הם $X_1=2$, $X_2=4$. כתוב במפורש את הרווח מסעיף ג'.

טבלאות.

$X\sim\chi^2_1:\Pr\{X<0.004\}=\Pr\{X>3.84\}=0.05$
$X\sim\chi^2_2:\Pr\{X<0.1\}=\Pr\{X>6\}=0.05$
$X\sim t_1:\Pr\{X<6.3\}=0.95,\ \Pr\{X<12.7\}=0.975$
$X\sim t_2:\Pr\{X<2.9\}=0.95,\ \Pr\{X<4.3\}=0.975$
$X\sim N(0,1):\Pr\{X<1.645\}=0.95,\ \Pr\{X<1.96\}=0.975$