טריוויה

עוזי וישנה

להלן רשימה ארוכה של טענות ושאלות. בידקו את עצמכם - האם אתם מסוגלים לענות (בקצרה) על השאלות, ולנמק (בקצרה) את טענות. הנימוקים הם תמיד מיידיים - לפי ההגדרה, או מרחק של צעד וחצי לוגיים ממנה.

- $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[2\sqrt{5}-3]$.
- לפולינום x^2-p אין שורש בשדה $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$ (כאשר p,q ראשוניים שונים). לכן $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] \neq \mathbb{Q}[\sqrt{q}]$.
- יהי K שדה, עם תת־שדה F. אם $\alpha,\beta \in K$ מקיימים $\alpha \in F[\beta]$, אז $F[\alpha] \subseteq F[\beta]$.
- תת־השדות $\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}[\sqrt{8}]$ של $\mathbb{R}$ שווים זה לזה (שוויון של קבוצות).
- $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$ הוא שדה. מהו האיזומורפיזם $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$?
- $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$ ו־ $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-8\rangle$ הם איזומורפיים, אבל אינם שווים.
- אם $f(x)$ איפריק מעל F אז $1+I, x+I, \dots, x^{n-1}+I$ בסיס ל־ $F[x]/I$ כמרחב וקטורי מעל F ($I = \langle f(x)\rangle$).
- מספרם של שורשי היחידה ה־n - פרימיטיביים הוא $\phi(n)$.
- $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2\rangle$ אינו שדה.
- שדה הפיצול של $x^{19}-x^3+471$ מעל $\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{C}$.
- לפולינום $x^{19}-x^3+471$ יש שורשים ממשיים.
- השדות $\mathbb{Q}[\sqrt{5}], \mathbb{Q}[\sqrt{10}], \mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ כולם שונים זה מזה (ואף אינם איזומורפיים).
- א. נסמן $f(x) = x^6-7x^4-6x^3+2x^2+42x-14$. אם $f(\alpha)=0$ $(\alpha \in)$, אז $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] \leq 6$.

  ב. $f(\sqrt{7}) = 0$ (מהר יותר!).

  ג. $g(x) = f(x)/(x^2-7)$ הוא פולינום מעל $\mathbb{Q}$.

  ד. (נתון ש־ $g(x)$ אי־פריק מעל $\mathbb{Q}$) אם $g(\alpha)=0$, אז $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = 4$.

- המימד של $\mathbb{Q}[\sqrt{6},\sqrt{14}]$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא 4.
  "המימד של $\mathbb{Q}[\sqrt{6},\sqrt{14}]$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ " הוא ביטוי חסר משמעות.
- המימד של $\mathbb{Q}[\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{2}}-4}]$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא לכל היותר 8 (אבל אולי 4 ואולי 2; לא 1).
- ω_3 הוא שורש היחידה ה־3 ־פרימיטיבי. השדות $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{11}]$ ו־ $\mathbb{Q}[\omega_3\cdot\sqrt[3]{11}]$ הם שונים אך איזומורפיים.
- למה לא: הפירוק של $x^6-4x^3+2x^2-12$ לגורמים אי־פריקים מעל $\mathbb{Q}$ הוא $(x^3-2x+2)(x^2-3)(x^2+x+2)$.
- למה לא: הפירוק של $x^6-4x^3+2x^2-12$ לגורמים אי־פריקים מעל $\mathbb{Q}$ הוא $(x^4-2x+3)(x^2-4)$.
- למה לא: הפירוק של $x^6-4x^3+2x^2-12$ לגורמים אי־פריקים מעל $\mathbb{Q}$ הוא $(x^3-2x+2\sqrt{3})(x^3+x^2-2\sqrt{3})$.
- אם $f(x)$ הוא הפולינום המינימלי של α מעל F , ו־ $g(x)$ הפול' המינ' של α^2 , אז $deg(g)\le deg(f)$.
- אם $[F[\alpha]\colon F]=6$ ו־ $[F[\beta]\colon F]=4$, אז $[F[\alpha,\beta\colon F]\in\{12,24\}$.
- אם $[F[\alpha]\colon F]=14$ ו־ $[F[\beta]\colon F]=9$, אז $[F[\alpha,\beta]\colon F]=126$.
- $x^{12}-2$ אי־פריק מעל $\mathbb{Q}$ ולכן גם מעל כל הרחבה 5־ממדית של $\mathbb{Q}$.
- לפולינום $f(x)=x^4-x+3694$ אין שורשים מודולו 3. לכן אין לו גם שורשים ב־$\mathbb{Z}$. לכן אין לו שורשים ב־$\mathbb{Q}$.
- α הוא שורש של הפולינום $x^3-2x^2+\sqrt{-5}x+4\sqrt{-5}$; אז $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]\le 6$.
- אפשר לבנות בסרגל ובמחוגה את ω_3,ω_5 , ולכן גם את ω_{15}.
- אם נתונות הנקודות $0,1,\omega_9$ במישור המרוכב, אז אפשר לבנות מצולע בן 45 צלעות.
- המימד של שדה הפיצול של x^6 ־6x51 $-\ 2x^2+{}^4$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא לכל־היותר 12.
- $\alpha,\beta,-\alpha\beta$ הם שלושת השורשים של פולינום f ממעלה 3 מעל F. הוכח שהפולינום פריק רמז: $f(0)$.
- $a,b\in F$, ו־ $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ne 0$. אז $F[\sqrt{a}+\sqrt{b}]=F[\sqrt{a},\sqrt{b}]$.
- הפולינום x^5-x^2+1 הוא ספרבילי מעל כל שדה.

- כל פולינום איפריק הוא ספרבילי מעל $\mathbb{Q}$.
- הפולינום $x^{12}+x^3+1$ אינו ספרבילי מעל $\mathbb{Z}_3$.
- שדה ממאפיין 7 מכיל תת־שדה איזומורפי ל־ $\mathbb{Z}_7$.
- שדה ממאפיין 0 מכיל תת־שדה איזומורפי ל־$\mathbb{Q}$.