אלגברה קומוטטיבית, 88-813

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ג

<u>ענו על ארבע שאלות</u>. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. יש להוכיח כל טענה.
משך המבחן. שלוש שעות (לא תנתן הארכה). חומר עזר מותר בשימוש: אין.

1. יהי $M = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/\mathbb{Z}$, מודול מעל $\mathbb{Z}$. (כמודול, $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1}{3} + \mathbb{Z}\frac{1}{9} + \mathbb{Z}\frac{1}{27} + \cdots$).
   (א) האם הוא ארטיני?
   (ב) האם הוא נותרי?
   (ג) מצאו מנה שלו שהיא מודול פשוט מעל $\mathbb{Z}$.
2. נתבונן באלגברה $A = \mathbb{Q}[\lambda, \mu^2, \frac{1}{\lambda-\mu}] \subseteq \mathbb{Q}(\lambda, \mu)$, שהיא אפינית מעל $\mathbb{Q}$.
   (א) מצאו $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in A$ כך ש־A הרחבה שלמה של תת־החוג $A_0 = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_t]$. מהו t?
   (ב) כתבו את הפולינום המינימלי של λ, μ^2 ו־$\frac{1}{\lambda-\mu}$ מעל A_0.
3. הוכיחו: כל חוג נותרי R עם $\mathrm{Kdim}(R) = 0$ הוא ארטיני (אין צורך להוכיח את הטענה המקבילה עבור חוג ראשוני למחצה).
4. הוכיחו ש־$\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}$ הוא שלם אלגברי מעל $\mathbb{Z}$.
5. (א) הוכיחו שכל אידיאל מקסימלי של $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ הוא מהצורה $\langle \lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2 - \alpha_2, \lambda_3 - \alpha_3 \rangle$ עבור $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (אפשר להסתמך על ה־Nullstellensatz (משפט האפסים של הילברט)).
   (ב) מצאו אידיאל מקסימלי של $\mathbb{R}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ שאינו מהצורה הזו.
6. נסחו והוכיחו את הלמה של Nakayama מעל חוג (קומוטטיבי) מקומי.

בהצלחה.